

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC
Departamento de Física



Transições de Fase na Matéria de Quarks Magnetizada com Repulsão Vetorial

Robson Zacarelli Denke

Tese de doutorado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), como parte dos requisitos para obtenção do título de “Doutor em Física”

Orientador: Prof. Dr. Marcus E. Benghi Pinto

Florianópolis
2015

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Denke, Robson Zacarelli

Transições de fase na matéria de quarks magnetizada com
repulsão vetorial / Robson Zacarelli Denke ; orientador,
Marcus E. Benghi Pinto - Florianópolis, SC, 2015.
240 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas.
Programa de Pós-Graduação em Física.

Inclui referências

1. Física. 2. Teoria quântica de campos. 3. Cromodinâmica
quântica. 4. Modelo Nambu-Jona-Lasinio. 5. Transições de
fase na QCD. I. Pinto, Marcus E. Benghi. II. Universidade
Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em
Física. III. Título.

Transições de Fase na Matéria de Quarks Magnetizada com Repulsão Vetorial

Robson Zacarelli Denke

Esta Tese foi julgada adequada para a obtenção do título de Doutor em Física, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, 12 de junho de 2015.

Prof. Dr. Luis Guilherme de Carvalho Rego
(Coordenador do Curso)

Banca Examinadora

Prof. Dr. Marcus E. Benghi Pinto
(Presidente - FSC/UFSC)

Prof. Dr. Fernando Silveira Navarra
(IF/USP)

Prof. Dr. Celso de Camargo Barros
Junior (FSC/UFSC)

Prof. Dr. Rudnei de Oliveira Ramos
(IF/UERJ)

Prof. Dr. Emmanuel Gräve de Oliveira
(FSC/UFSC)

Prof. Dr. José Ricardo Marinelli
(FSC/UFSC)

Este trabalho é dedicado à minha
esposa Cristiane, aos meus pais e
família.

Agradecimentos

Este trabalho contou com o imprescindível apoio financeiro e colaboração do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes). Também agradeço antecipadamente aos membros da banca examinadora pela aceitação do convite para avaliar este estudo. Pessoalmente, gostaria de agradecer ao professor Marcus pelo empenho e dedicação na condução diligente deste projeto e pelo aprendizado singular que me foi proporcionado desde o início.

Resumo

Neste trabalho investigamos as transições de fase na matéria de quarks magnetizada usando o modelo de NJL com dois sabores na presença de acoplamento vetorial repulsivo (G_V). Verificamos que a contribuição vetorial produz o encolhimento da linha de transição de primeira ordem e pode favorecer o mecanismo de *back-bending* no regime de acoplamento forte. Este fato permite conciliar alguns resultados da rede com as previsões teóricas sobre a existência de um ponto crítico no diagrama de fases da QCD. Analisamos como a ação de um campo magnético (B) intenso na matéria de quarks tende a fortalecer a região de primeira ordem e que também determina um padrão oscilatório na densidade. Concluimos que os efeitos opostos do acoplamento vetorial e do campo magnético na restauração da simetria quiral leva a um desdobramento de múltiplas fases magnetizadas. A ação combinada de B e G_V pode originar linhas de coexistência no diagrama de fases que apresentam um comportamento exótico similar ao observado para a transição sólido-líquido da água. Mostramos como a influência da repulsão vetorial deve estabilizar fases magnéticas de densidade intermediária e que certas combinações dos parâmetros B e G_V determinam pontos triplos no diagrama de fases. Exploramos as propriedades magnéticas anisotrópicas sobre os quarks e como a contribuição vetorial deve afetar a magnetização induzida determinando um comportamento diamagnético para o sistema.

Palavras-chave: teoria quântica de campos, cromodinâmica quântica, plasma de quarks e glúons, modelo NJL, matéria de quarks, transições de fases da QCD.

PACS n^{os}: 11.10.-z, 12.38.-t, 12.38.Mh, 12.39.Fe, 21.65.Qr, 25.75.Nq

Abstract

In this work we investigate the phase diagram of dense magnetized quark matter in the framework of the two-flavor Nambu–Jona-Lasinio model when a repulsive vector coupling (G_V) is present. We verify that the vector contribution could shrink the first order transition line and can support the back-bending mechanism under a strong coupling regime. This result allows one to conciliate some lattice results with theoretical predictions about the existence of a critical point in the QCD phase diagram. Our analysis shows how an intense magnetic field (B) acts in the quark matter, strengthening the coexistence region in the phase diagram and setting an oscillatory pattern in density values. The opposite effect of the vector coupling and magnetic field in the chiral symmetry restoration leads to a splitting of multiple magnetic phases. The combined action of B and G_V gives rise to coexistence lines which can render an exotic behavior resembling the solid-liquid transition observed in the water phase diagram. We show how the vector repulsion stabilizes the intermediary magnetic phases and that certain B and G_V parametric combinations can cause a triple point to appear in the phase diagram. We also study the anisotropic properties of magnetized quark matter and how the vector-like contribution affects the induced magnetization leading to a diamagnetic behavior.

Keywords: quantum field theory, quantum chromodynamics, quark-gluon plasma, NJL model, quark matter, QCD phase transitions.

PACS numbers: 11.10.-z, 12.38.-t, 12.38.Mh, 12.39.Fe, 21.65.Qr, 25.75.Nq

Lista de Figuras

- 1.1 Mudança súbita nas propriedades físicas da matéria hadrônica em função da temperatura. (Painel superior) Resultados de simulação da QCD na rede extraídos da Ref. [1] mostrando o comportamento da pressão da matéria hadrônica em função da temperatura em potencial químico nulo ($\mu = 0$). As diferentes curvas referem-se aos vários graus de liberdade que podem ser considerados. A pressão identificada por P_{SB} refere-se ao limite de Stefan-Boltzmann do gás hadrônico livre. (Painel inferior) Dependência na temperatura do condensado de quarks $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ obtida em cálculos na rede da Ref. [2] para alguns valores de massa nua dos quarks. A massa neste caso é expressa em termos da massa do quark estranho m_s 28
- 1.2 (Painel superior) Contorno de fase da QCD obtido a partir do Modelo de Sacola do MIT com valor de constante de sacola igual a $B = 57.5 \text{ MeV/fm}^3$. Podemos notar que a fase hadrônica evolui para uma fase de plasma a medida que aumentamos a temperatura e/ou potencial químico. (Painel inferior). Exemplo de um diagrama de fase esquemático provável para a matéria de quarks. Os estados hadrônicos de dois (mésons) ou três (bárions) quarks tornam-se desconfinados em temperaturas elevadas acima da linha de desconfinamento. Também espera-se que tal transição seja acompanhada por uma restauração parcial da simetria quiral. 31
- 1.3 Parâmetros experimentais de *freeze-out* químico obtidos nos aceleradores LEP, SPS, AGS e SIS. A curva mostrada corresponde à parametrização $T(\mu_B) \approx 0.17 - 0.13\mu_B^2 - 0.06\mu_B^4$. Gráfico extraído da Ref. [15]. 35

2.1	Diagramas de Feynman em nível de árvore implícitos na lagrangiana de Nambu–Jona-Lasinio. O primeiro termo da soma representa a propagação de um férmion livre. O segundo termo, corresponde a interação de um férmion com um antiférmion por meio de um vértice escalar. O último termo refere-se a interação férmion-antiférmion através de um vértice pseudo-escalar	42
2.2	Contribuições de primeira ordem na autoenergia para a massa de um quark na aproximação de Hartree.	45
2.3	Equação diagramática de Dyson para o propagador do quark vestido. A linha fina representa a massa nua, m , e a linha espessa no laço está relacionada à correção de massa de Hartree.	46
2.4	Diagramas relativos a expansão em série RPA para o propagador mesônico efetivo.	57
2.5	Decaimento eletrofraco via a aniquilação de um <i>loop</i> de quark para uma corrente axial A_a^μ com isospin a	59
2.6	Determinação do potencial termodinâmico de campo médio para ($\mu = 0, T = 0$) no caso quiral $m = 0$ (Painel superior) e para massa de corrente finita $m = 5.6$ MeV (Painel inferior). O valor mínimo da função representa a massa de vácuo $M_{vac} \sim 400$ MeV assumida pelo condensado. Aqui, nós normalizamos o potencial termodinâmico subtraindo a constante $\Omega(0, 0, M_{vac})$, tal que seu valor seja nulo em ($\mu = 0, T = 0$).	61
2.7	(Painel superior) Aumentando a temperatura de 150 – 200 MeV observamos uma transição de fase de segunda ordem partindo de uma massa efetiva finita (linha cheia) em direção a um estado mínimo não massivo (curva pontilhada) para $\mu = 0$; (Painel inferior) Conforme o potencial químico varia de 300 – 440 MeV ($T = 0$), uma transição de primeira ordem ocorre, caracterizada principalmente pelo aparecimento de um novo mínimo global. . .	62
2.8	Evolução da forma do potencial termodinâmico no caso quiral ($m = 0$) conforme a temperatura sobe da esquerda para a direita. O dois mínimos devem desaparecer exatamente quando a curvatura é nula no fundo do potencial.	63
2.9	Mudanças produzidas na forma do potencial efetivo no caso quiral ($m = 0$) a medida que o potencial químico aumenta da esquerda para a direita. Os mínimos de igual profundidade definem a linha de transição de primeira ordem e as linhas espinodais são determinadas quando a derivada segunda é nula.	63

2.10	Dependência da massa efetiva M na temperatura em $\mu = 0$ (Painel superior) e no potencial químico em $T = 0$ (Painel inferior). No gráfico da esquerda observamos uma transição de fase de segunda ordem no caso quiral ($m = 0$) e um <i>crossover</i> com $m = 5.6$ MeV. No gráfico da direita, ambos os casos estão relacionados a transição de primeira ordem.	65
2.11	Dependência na temperatura para a primeira derivada do potencial termodinâmico em relação ao parâmetro de ordem M em $\mu = 0$ para ambos os casos.	66
2.12	Modificação na forma do potencial termodinâmico no caso quiral ao longo dos eixos da temperatura e do potencial químico. Note o contorno do limite de fases definido pela restauração da simetria quiral, e as regiões respectivas as transições de primeira e segunda ordens.	67
2.13	Massa efetiva dos quarks no modelo SU(2) de NJL como função de μ e T no limite quiral (Painel superior) e massa de corrente finita (Painel inferior).	68
2.14	Contornos de transição de fase mostrando as regiões correspondentes onde a primeira ordem ocorre e também a região relativa a transição em segunda ordem ou <i>crossover</i> . O domínio de primeira ordem encontra a região de segunda ordem no ponto tricrítico (TCP). Enquanto no caso de transição <i>crossover</i> esta posição é o ponto crítico (CP).	69
2.15	Principais quantidades termodinâmicas (pressão P , densidade de entropia s e densidade de energia ε) normalizadas por potências de T de modo a comparar seu comportamento conforme a temperatura se eleva. O gráfico superior representa o caso quiral e o inferior o caso de massa de corrente finita 5.6 MeV.	72
2.16	Resultados no modelo SU(2) de NJL obtidos para o observável correspondente a medida de interação $\Delta = \varepsilon - 3p/T^4$ no caso quiral e também para a massa de quarks finita. Apresentamos também os resultados de Wuppertal-Budapeste determinados na rede (<i>Lattice</i>) em $N_f = 2 + 1$ sabores para comparação, de acordo com a referência [46]. Além disso, mostramos os resultados relativos a aproximação <i>quenched</i> para a QCD na rede extraídos de [47]	73
2.17	Respectivas densidades bariônicas relativas em função do potencial químico.	74
2.18	Gráfico da equação de estado no caso quiral e para a massa de corrente finita, ambos em $\mu = 0$	76

2.19	Velocidade do som aproximada P/ε obtida no modelo a dois sabores de NJL, para $\mu = 0$ e $0 < T < 400$ MeV em unidades de velocidade c^2 . Comparamos no gráfico este resultado do modelo NJL(2) com os valores determinados para a mesma grandeza na rede (<i>Lattice</i>) sob duas extensões temporais $N_\tau = 6, 8$ e duas ações fermiônicas (p4 e asqtad) [52]. Também mostramos o resultado usando o modelo hadrônico (HRG) extraído da mesma referência.	77
2.20	Mapa de contorno para a velocidade do som aproximada em função de μ e T para $m = 5.6$ MeV. Repare que a linha escura a qual marca a região onde a velocidade do som aumenta repentinamente está bem próxima ao esperado contorno de transição de fase.	79
2.21	Linhas isentrópicas s/A obtidas em nosso cálculo usando o modelo de NJL. Os pontos coloridos foram obtidos a partir de simulações na rede (círculos $s/A = 30$, quadrados $s/A = 45$ e triângulos $s/A = 300$). A trajetória contínua em púrpura indicada foi avaliada por Braun-Munzinger e Wambach [53] assumindo que o Universo primordial expandiu isentropicamente e usando o valor conhecido para razão de bárions para fótons.	80
3.1	Diagrama esquemático de Columbia para o diagrama de fases da QCD a três sabores em potencial químico nulo.	83
3.2	Superfícies geradas pelos valores críticos de potencial químico como função das massas dos quarks representando os resultados obtidos em simulações ordinárias na rede Ref. [57]. Para garantir a existência de um ponto crítico, a região de primeira ordem deve expandir-se ao longo do plano $m_{u,d} - m_s$.	84
3.3	Resultado “exótico” obtido por de Forcrand e Philipsen [57] em potencial químico imaginário mostrando o encolhimento da superfície quiral crítica.	85
3.4	De acordo com Fukushima [58], a introdução de um acoplamento vetorial repulsivo pode resultar em um encolhimento inicial da região de primeira ordem. Entretanto, a medida que o potencial químico cresce a expansão é retomada se o acoplamento não for muito intenso. Com esta dobra, a linha vertical posicionada em massas não físicas pequenas pode interceptar a superfície duas vezes implicando na observação de mais de um ponto crítico.	86
3.5	Diagramas de fase obtidos com o valor de constante de acoplamento $G_S \Lambda^2 = 2.44$. A medida que a intensidade do acoplamento vetorial se eleva, verificamos que a região de primeira ordem torna-se enfraquecida a que os valores para o potencial químico de coexistência são deslocados para valores mais altos.	91

3.6	Diagrama de fases obtidos no regime de acoplamento forte $G_S \Lambda^2 = 4$. As linhas cheias representam a transição de fase de primeira ordem, enquanto as linhas tracejadas referem-se a transição de fase de segunda ordem. Quando o acoplamento vetorial é mantido nulo, o contorno de fase torna-se todo de primeira ordem. Aumentando a magnitude da interação vetorial faz com que o domínio da primeira ordem enfraqueça e fique apenas um padrão de dois pontos críticos.	92
3.7	Desaparecimento do ponto crítico adicional conforme a massa de corrente dos quarks se eleva. Os correspondentes valores da massa dos quarks são mostrados no gráfico em unidades de MeV.	93
3.8	Resultado obtido na Ref. [60] usando o LSM [59] mostrando o mesmo padrão de múltiplos pontos críticos abaixo dos valores não físicos para a massa do pion.	94
3.9	Respectivos diagramas de fases obtidos pela aplicação dos métodos de MFA e OPT. O padrão de dois pontos críticos aparece no método de campo médio MFA somente na presença de um G_V não nulo. O gráfico de OPT foi extraído da Ref.[60]. Uma massa de corrente dos quarks de $m = 0.1$ MeV foi usada aqui.	95
3.10	Dependência do potencial químico do ponto crítico em função da massa de corrente dos quarks como obtido com MFA.	96
3.11	Dependência do potencial químico do ponto crítico em função da massa de corrente dos quarks como obtido com MFA na presença de um termo de interação vetorial.	97
3.12	Dependência do potencial químico do ponto crítico em função da massa de corrente dos quarks como obtido na Teoria de Perturbação Otimizada (OPT). Gráfico extraído da Ref. [60]. . .	98
4.1	Valores absolutos médios em evento-por-evento dos campos elétrico e magnético como função do parâmetro de impacto (gráficos extraídos da Ref. [76]).	101
4.2	Evolução temporal do campo magnético criado por uma carga puntiforme para diferentes valores de condutividade elétrica. Gráfico extraído da referência [77]. Em meio condutor o declínio do campo magnético é mais lento.	102
4.3	Aumento no valor da massa efetiva devido a catálise magnética observada no modelo de NJL e no modelo de Sakai-Sugimoto. (gráfico extraído da Ref. [85]). Os resultados apresentam a mesma dependência com o campo magnético exceto pelo deslocamento existente.	110

4.4	Comparação entre as direções relativas do $spin$, \vec{s} , e do momento magnético de $spin$, $\vec{\mu}_S$, nos pares de férmion-anti-férmion e férmion-férmion. A aplicação de um campo magnético externo B deve contribuir para a formação dos pares $\langle f \bar{f} \rangle$ e induzir a dissociação do par de Cooper $\langle f f \rangle$	111
4.5	(Painel superior) Variação da temperatura pseudo crítica de crossover no modelo de NJL mostrando um aumento monotônico conforme a intensidade do campo magnético cresce. (Painel inferior) O mesmo cálculo da temperatura pseudo crítica obtido na rede extraído da Ref.[88] estabelecendo o comportamento oposto.	113
4.6	Comportamento da temperatura pseudo crítica no modelo de NJL com constante de acoplamento G_S dependente do campo externo. Gráfico extraído da Ref. [93]. Como T_{pc} decresce com a intensidade do campo magnético esse resultado mostra-se consistente ao determinado na rede.	114
4.7	Potencial químico de coexistência em função de B a temperatura zero e acoplamento vetorial G_V variável. A interação vetorial enfraquece o decréscimo no contorno de fase que é devido a Catálise Magnética Inversa.	115
4.8	Dependência da localização do ponto crítico no eixo do potencial químico em função da variação de B e G_V . Os valores nos contornos representam o potencial químico no ponto crítico. O potencial químico decresce em campos magnéticos mais intensos e aumenta em valores de G_V mais repulsivos.	117
4.9	Dependência da localização do ponto crítico no eixo da temperatura em função da variação de B e G_V . Os valores nos contornos representam a temperatura no ponto crítico. A coordenada da temperatura aumenta com B maior e diminui com acoplamento G_V decrescente.	118
4.10	Diagramas de fases no plano $T - \mu$ mostrando a influência da interação vetorial em $G_V = 0.5G_S$ e campo magnético de valor $eB = 15 m_\pi^2$	119
4.11	Diagramas de fases no plano $T - \mu$ mostrando a influência da interação vetorial em $G_V = 0.3G_S$ e campo magnético de valor $eB = 6 m_\pi^2$	120
4.12	Diagrama de fases de primeira ordem no plano $T - \rho_B$ mostrando a influência da interação vetorial em $G_V = 0.5G_S$ e intensidade de campo magnético de $eB = 15 m_\pi^2$	122
4.13	Diagrama de fases de primeira ordem no plano $T - \rho_B$ mostrando a influência da interação vetorial em $G_V = 0.3G_S$ e intensidade de campo magnético de $eB = 6 m_\pi^2$	123

4.14	Oscilações na densidade mais alta da matéria hadrônica inerentes ao efeito de de Haas-van Alphen conforme a intensidade do campo magnético se eleva. Com o incremento no acoplamento vetorial verificamos um decréscimo global nos valores de densidade. . . .	124
4.15	Resultados obtidos por Preis et al [80] usando o modelo de Sakai-Sugimoto (Painel superior) e o modelo de NJL (Painel inferior) para um sabor de quark. As oscilações na densidade estão presentes somente no cálculo de NJL, enquanto o cálculo baseado na holografia não é sensível a este efeito.	125
4.16	Oscilações de De Haas-van Alphen na densidade como função do inverso do campo magnético para alguns valores de acoplamento G_V	126
5.1	Evolução da forma do potencial termodinâmico em $T = 0$, $eB = 5.1 m_\pi^2$ e $G_V = 0.2 G_S$ para alguns valores de potencial químico. Podemos verificar que existe a possibilidade de coexistência múltipla para alguns valores específicos dos parâmetros de controle B e G_V	132
5.2	Modificação do perfil do potencial termodinâmico em temperatura nula $T = 0$, para o campo $eB = 4.56 m_\pi^2$ e acoplamento vetorial $G_V = 0.139 G_S$ para alguns valores de potencial químico. Percebemos que pelo menos na temperatura nula é possível a coexistência de quatro mínimos degenerados.	133
5.3	Dependência da massa efetiva dos quarks em função do potencial químico para alguns valores de campo magnético para $G_V = 0.2 G_S$. Com a redução na intensidade do campo, percebemos que a quantidade de oscilações aumenta de acordo com o preenchimento dos níveis de Landau.	134
5.4	Dependência da massa efetiva dos quarks em função do potencial químico para alguns valores de acoplamento vetorial para $eB = 5 m_\pi^2$. Conforme o valor de G_V aumenta ocorre a inclinação do gráfico na região de transição.	135
5.5	Diagramas de fases para a matéria de quarks no plano $T - \mu$ (Painel Esquerdo) e no plano $T - P$ (Painel Direito) sob uma magnitude de campo $eB = 5.1 m_\pi^2$ e acoplamento vetorial de $G_V = 0.3 G_S$. Em ambas as figuras, a linha contínua fina representa o caso onde $G_V = 0$ na mesma intensidade de campo para comparação. Ao estabelecer o acoplamento $G_V = 0.3 G_S$, verificamos o desdobramento em três novas linhas de coexistência caracterizadas pelos pontos críticos $CP1$, $CP2$ e $CP3$	136

- 5.6 Painel Esquerdo: Diagrama de fases associado a uma intensidade de campo magnético $eB = 5.1 m_\pi^2$ e magnitude de acoplamento vetorial de $G_V = 0.3 G_S$ como visto no plano $T - \rho_B$. Novamente, o caso $G_V = 0$ (linha contínua fina) é mostrado para efeito de comparação. Percebe-se o desdobramento em três ramos de coexistência caracterizadas pelos pontos críticos $CP1$, $CP2$ e $CP3$. Painel Direito: O diagrama $T - \rho_B - P$ construído para os mesmos valores de campo B e acoplamento vetorial G_V . Em ambos os diagramas é possível distinguir três transições de fases de primeira ordem. Cada transição é definida pela coexistência de duas densidades distintas na mesma pressão. 139
- 5.7 Coexistência de mínimos globais do potencial termodinâmico para algumas temperaturas selecionadas e potencial químico menor. . . 141
- 5.8 Coexistência de mínimos globais do potencial termodinâmico para algumas temperaturas selecionadas e potencial químico maior. . . 141
- 5.9 Sequência de gráficos mostrando como ocorre a restauração da simetria quiral com a elevação da temperatura, para $eB = 5.1 m_\pi^2$ e $G_V = 0.2 G_S$ 143
- 5.10 Sequência de gráficos mostrando como ocorre a restauração da simetria quiral com a elevação da temperatura, para $eB = 5.1 m_\pi^2$ e $G_V = 0.2 G_S$ 144
- 5.11 Diagrama de fases no plano $T - \mu$ (Painel Esquerdo) e no plano $P - T$ (Painel Direito) sob uma intensidade de campo magnético de $eB = 5.1 m_\pi^2$ e acoplamento vetorial de $G_V = 0.2 G_S$. Em $T = 0$, ambos os diagramas mostram um ponto triplo (TP1) no qual ocorre a coexistência trifásica. Quando a temperatura sobe, a coexistência trifásica não persiste e há a separação em duas linhas comuns de coexistência dual de fases como pode ser visto pelas áreas ampliadas. Em $T \simeq 21.4 \text{ MeV}$, as linhas de coexistência dual convergem de modo assintótico para outro ponto triplo (TP2). Além desta temperatura, observa-se apenas uma linha de coexistência a qual acaba em um ponto crítico (CP1). . . 145
- 5.12 Diagrama de fases no plano $T - \rho_B$ (Painel Esquerdo) e isotermas (Painel Direito) para o caso onde $eB = 5.1 m_\pi^2$ e $G_V = 0.2 G_S$. Os quadrados e triângulos indicam os pontos triplos e os círculos indicam os pontos críticos. 147

- 5.13 Diagrama de fases para a matéria de quarks no plano $T - \rho_B$ (Painel Esquerdo) e as respectivas isotermas (Painel Direito) sob uma intensidade de campo magnético de $eB = 4.56 m_\pi^2$ e acoplamento vetorial $G_V = 0.139 G_S$. Os pontos pretos próximos a temperatura zero representam a formação de um sistema quadrifásico, com quatro densidades distintas aparecendo na mesma pressão nula. Conforme a temperatura sobe, tais fases múltiplas não sobrevivem e o caso ordinário é restaurado. 149
- 5.14 Valores críticos G_V^c da constante de acoplamento vetorial relativos aos estados intermediários $(k_u, k_d) = (0, 0)$ (linha contínua preta) e $(k_u, k_d) = (0, 1)$ (linha tracejada vermelha) em função do campo magnético para $T = 0$. As linhas representam os pares (B, G_V^c) associados com a formação de sistemas trifásicos. Os parâmetros relacionados com o aparecimento da coexistência quadrifásica estão marcados pelos pontos pretos. Também mostramos na figura os intervalo de campo magnético B e acoplamento vetorial G_V aceitáveis de acordo com as observações experimentais e estimativas teóricas. Aqui as linhas verticais pontilhadas em verde definem a janela de campo magnético onde a formação de estados múltiplos foi estudada. O círculo aberto em $G_V = 0$ representa a exclusão deste valor na coexistência trifásica. 150
- 5.15 Valores do potencial químico de coexistência necessários à formação dos sistemas trifásicos (linha cheia) e dos sistemas quadrifásicos (pontos pretos) em $T = 0$ 152
- 5.16 Valores normalizados para os condensados de quark associados com os sistemas multifásicos relativos a emergência dos estados intermediários $(k_u, k_d) = (0, 0)$ (Painel esquerdo) e $(k_u, k_d) = (0, 1)$ (Painel direito) para a temperatura $T = 0$ 154
- 5.17 Coexistência simultânea de uma fase de vácuo, matéria nuclear e matéria de quarks na mesma pressão em temperatura nula para o valor de campo $eB = 5.724 m_\pi^2$ e acoplamento vetorial $G_V = 0.256 G_S$ 155
- 6.1 Oscilações de De Haas-van Alphen para a densidade da matéria de quarks em função do campo magnético calculadas para alguns valores de acoplamento vetorial G_V e potencial químico $\mu = 500$ MeV. 169
- 6.2 Dependência da densidade de magnetização para a matéria densa de quarks em função do campo magnético B aplicado para diferentes valores de acoplamento vetorial G_V para $\mu = 500$ MeV. 170

6.3	Dependência da densidade de magnetização para a matéria densa de quarks em função do campo magnético B aplicado para diferentes valores de acoplamento vetorial G_V para $\mu = 500 \text{ MeV}$.	171
6.4	Comparação entre os valores determinados para as pressões paralela e perpendicular em função do campo magnético B para diferentes valores da constante de acoplamento G_V com potencial químico $\mu = 500 \text{ MeV}$.	174
6.5	Comparação entre os valores determinados para as pressões paralela e perpendicular em função do campo magnético B para diferentes valores da constante de acoplamento G_V com potencial químico $\mu = 500 \text{ MeV}$.	175
6.6	Valores de densidade de magnetização em função da densidade da matéria para diferentes valores de G_V sob campo magnético constante $eB = 2.0 m_\pi^2$.	176
6.7	Variação da razão entre as pressões perpendicular e paralela em função da densidade do meio sob campo magnético $eB = 2.0 m_\pi^2$ e magnitudes distintas de G_V .	177
6.8	Equações de estado determinadas pelas pressões paralela e perpendicular sob um campo magnético de $eB = 2 m_\pi^2$. Na sequência de gráficos apresentamos os resultados determinados para diferentes magnitudes de acoplamento vetorial G_V . As linhas mais finas representam as soluções instáveis.	180
6.9	Equações de estado determinadas pelas pressões paralela e perpendicular sob um campo magnético de $eB = 2 m_\pi^2$. Na sequência de gráficos apresentamos os resultados determinados para diferentes magnitudes de acoplamento vetorial G_V . As linhas mais finas representam as soluções instáveis.	181
6.10	Equações de estado determinadas pelas pressões paralela e perpendicular sob um campo magnético de $eB = 5 m_\pi^2$. Na sequência de gráficos apresentamos os resultados determinados para diferentes magnitudes de acoplamento vetorial G_V . As linhas mais finas representam as soluções instáveis.	182
6.11	Equações de estado determinadas pelas pressões paralela e perpendicular sob um campo magnético de $eB = 5 m_\pi^2$. Na sequência de gráficos apresentamos os resultados determinados para diferentes magnitudes de acoplamento vetorial G_V . As linhas mais finas representam as soluções instáveis.	183

6.12	Equações de estado determinadas pelas pressões paralela e perpendicular sob um campo magnético de $eB = 8m_\pi^2$. Na sequência de gráficos apresentamos os resultados determinados para diferentes magnitudes de acoplamento vetorial G_V . As linhas mais finas representam as soluções instáveis.	184
6.13	Equações de estado determinadas pelas pressões paralela e perpendicular sob um campo magnético de $eB = 8m_\pi^2$. Na sequência de gráficos apresentamos os resultados determinados para diferentes magnitudes de acoplamento vetorial G_V . As linhas mais finas representam as soluções instáveis.	185
6.14	Efeito do acoplamento vetorial na energia de ligação associada à matéria magnetizada de quarks sob diferentes valores de campo magnético. Aqui as linhas mais finas representam soluções termodinamicamente e/ou mecanicamente instáveis da equação do gap.	187
C.1	Diagramas de NJL diagrams na parametrização OPT.	211
C.2	Diagramas de Feynman associados com a densidade de lagrangiana SU(2) de NJL na expansão δ de OPT.	212
C.3	Diagramas relativos a interpolação OPT da lagrangiana SU(2) de NJL até a ordem δ^1	213
F.1	Linha de separação de fases no plano $P - T$	224

Sumário

1	Introdução	27
1.1	Plasma de Quarks e Glúons	29
1.2	O Diagrama de Fases da QCD	30
1.3	Colisões Relativísticas de Íons Pesados	33
1.4	Implicações Astrofísicas	35
2	O Modelo de Nambu–Jona-Lasinio SU(2)	37
2.1	Teorias Efetivas para a QCD	37
2.2	Lagrangiana de Interação de NJL e suas Simetrias . . .	38
2.3	A Transformação de Bogoliubov-Valatin	42
2.4	Autoenergia na Aproximação de Campo Médio	44
2.5	Matéria de Quarks Quente e Densa	47
2.5.1	NJL em Temperatura e Densidade Finitas	49
2.5.2	Versão Bosonizada da Lagrangiana de NJL	50
2.5.3	O Potencial Termodinâmico e a Equação do Gap	52
2.5.4	Modos de Matsubara em Temperatura e Densidade Finitas	53
2.5.5	Regularização das Integrais Divergentes	55
2.5.6	NJL em Temperatura Nula e Densidade Finita	55
2.6	Escolha dos Parâmetros	57
2.7	Solução Numérica da Equação do Gap	60
2.8	Observáveis Termodinâmicos	70
2.9	Considerações Finais	81
3	Contribuições Vetoriais no Modelo NJL SU(2)	82
3.1	Contribuição Vetorial no Modelo NJL	87
3.2	Efeitos em Alta Temperatura e Meio Denso	88
3.3	Resultados na Aproximação de Campo Médio	91
3.4	Comparação com os Resultados da OPT	95
3.5	Considerações Finais	98

4	Interação Vetorial na Matéria de Quarks Magnetizada	99
4.1	Potencial Termodinâmico em Temperatura Finita	103
4.2	Potencial Termodinâmico em Temperatura Zero	108
4.3	O Fenômeno da Catálise Magnética	110
4.4	O Fenômeno da Catálise Magnética Inversa	114
4.5	Análise do Diagrama de Fases	116
4.6	Diagramas de Fases no Plano $T - \rho_B$	121
4.7	Oscilações de De Haas-van Alphen na Densidade	123
4.8	Considerações Finais	127
5	Desdobramento de Fases Magnéticas Múltiplas na Matéria de Quarks	128
5.1	Introdução	129
5.2	Soluções da Equação de Gap para Sistemas de Duas Fases	131
5.3	Soluções das Equações de Gap para Sistemas Trifásicos e Quadrifásicos	140
5.4	Condições Paramétricas para a Formação de Estados Múltiplos	150
5.5	Sumário e Conclusões	155
6	Anisotropia na Matéria de Quarks Magnetizada	157
6.1	Anisotropia na Pressão	158
6.2	Magnetização no Modelo de NJL SU(2) com Acoplamento Vetorial	160
6.3	Cálculo da Magnetização	163
6.4	Influência da Interação Vetorial na Magnetização	167
6.5	Equações de Estado Anisotrópicas	178
6.6	Estabilidade da Matéria de Quarks em Campo Magnético Finito e $G_V > 0$	186
6.7	Considerações Finais	188
7	Conclusões	189
	Apêndices	206
A	Cálculo da Contribuição de Vácuo	206
B	Contribuição do Meio em T=0	208
C	Teoria de Perturbação Otimizada no Modelo NJL SU(2)	210

D	Cálculo da Contribuição de Vácuo em Campo Magnético Não Nulo	215
E	Contribuição do Meio em $T=0$ e Campo Magnético Não Nulo	222
F	Equação de Clausius-Clayperon em Campo Magnético Não Nulo	224
G	Derivadas Auxiliares para o Cálculo da Magnetização	226
G.1	Derivada da Contribuição de Vácuo	226
G.2	Derivada da Contribuição Magnética	228
G.3	Derivada da Contribuição do Meio em Temperatura Finita	230
G.4	Derivada da Contribuição do Meio em Temperatura Nula	231
G.5	Derivada da Contribuição de Vácuo no Condensado . .	233
G.6	Derivada da Contribuição Magnética no Condensado . .	234
G.7	Derivada da Contribuição do Meio no Condensado em Temperatura Finita	236
G.8	Derivada da Contribuição do Meio no Condensado em Temperatura Nula	238

Capítulo 1

Introdução

Atualmente a formulação da Cromodinâmica Quântica QCD (Quantum Chromodynamics) representa uma das mais notáveis conquistas da física teórica. Apesar disso, a compreensão plena dos mecanismos que determinam os fenômenos subnucleares ainda permanece um desafio significativo ao nosso entendimento. No mundo microscópico, a interação forte determina o surgimento das variedades de matéria e como as partículas elementares agrupam-se em estruturas mais complicadas.

Ao longo das últimas décadas, acredita-se que a matéria hadrônica (bárions e mésons) deve experimentar uma transição de fase termodinâmica quando estes constituintes nucleares ficam sujeitos a condições extremas de temperatura e densidade elevadas. A partir desta transição de fase da QCD, presume-se a existência de um novo estado da matéria chamado de Plasma de Quarks e Glúons (QGP), remanescente do “derretimento” dos prótons e nêutrons. Com o objetivo de confirmar esses pressupostos teóricos e verificar a validade da QCD, vários estudos têm sido realizados com o uso de grandes aceleradores de partículas para testar a natureza íntima desses blocos fundamentais. Esforços sem precedentes estão sendo realizados para a montagem de novas instalações experimentais com o intuito de investigar as propriedades da matéria de quarks.

O mais novo acelerador de partículas, LHC (*Large Hadron*

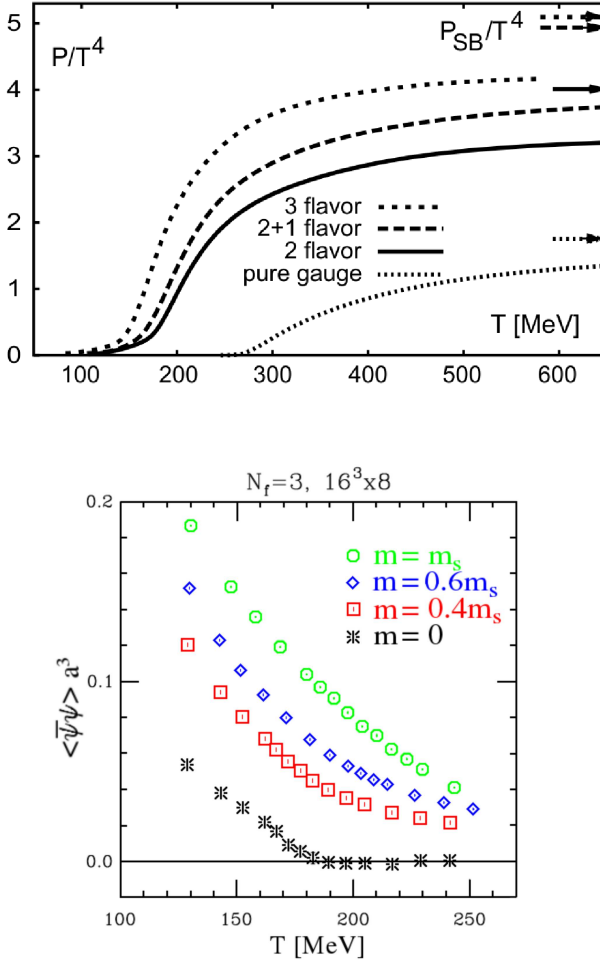


Figura 1.1: Mudança súbita nas propriedades físicas da matéria hadrônica em função da temperatura. (Painel superior) Resultados de simulação da QCD na rede extraídos da Ref. [1] mostrando o comportamento da pressão da matéria hadrônica em função da temperatura em potencial químico nulo ($\mu = 0$). As diferentes curvas referem-se aos vários graus de liberdade que podem ser considerados. A pressão identificada por P_{SB} refere-se ao limite de Stefan-Boltzmann do gás hadrônico livre. (Painel inferior) Dependência na temperatura do condensado de quarks $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ obtida em cálculos na rede da Ref. [2] para alguns valores de massa nua dos quarks. A massa neste caso é expressa em termos da massa do quark estranho m_s .

Collider), pode atingir energias mais altas, proporcionando uma boa perspectiva na busca deste estado. Os experimentos realizados pela Colaboração ALICE (*A Large Ion Collider Experiment*) no LHC são especificamente voltados para a investigação do plasma de quarks e glúons. Outra instalação importante a considerar é o acelerador RHIC (*Relativistic Heavy Ion Collider*), o qual tem nos proporcionado uma grande quantidade de dados experimentais. Nestas máquinas, a aceleração e colisão de núcleos pesados, tais como ouro e chumbo, pode revelar a estrutura interna de seus prótons e nêutrons constituintes conforme atingem-se ordens mais elevadas de temperatura e densidade de partículas.

Além disso, resultados numéricos obtidos em simulações discretas na rede, têm sugerido uma alteração substancial nos observáveis termodinâmicos quando a temperatura supera a região próxima a 150 – 170 MeV. Na Fig. 1.1 mostramos o comportamento da pressão da matéria nuclear em função da elevação da temperatura segundo cálculos fornecidos pela rede [1]. Na mesma figura também mostramos o comportamento em função da temperatura de outra grandeza importante que consiste no condensado de quarks $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ conforme avaliado pela rede [2]. Por meio desses resultados espera-se que a transição de fase da QCD seja observada neste intervalo de temperaturas.

1.1 Plasma de Quarks e Glúons

Os quarks que formam um nucleon estão sujeitos as regras impostas pela liberdade assintótica e juntos devem assegurar um arranjo que tenha carga de cor nula [3]. Esta idealização hadrônica é bem representada no Modelo de Sacola do MIT [4], onde a ação recíproca entre a pressão criada pelos quarks movendo-se internamente e a pressão externa constante do vácuo define uma região finita de propagação (sacola ou bolha de hádrons).

Com o aumento da temperatura, a energia cinética dos quarks torna-se maior e a pressão assim criada ultrapassa o valor da pressão constante do vácuo B (também chamada de constante de sacola). Este desequilíbrio na pressão faz com que o tamanho do hádron fique maior que antes. Além disso, para a matéria ordinária, a densidade de nucleons na fase hadrônica é da ordem de 0.17 fm^{-3} . Este valor também pode ser aumentado compactando juntos muitos núcleos dentro de uma pequena região do espaço. O aumento na temperatura e/ou densidade induz estas bolhas a coalescer e dar origem a uma nova grande sacola,

onde os quarks podem mover-se quase livremente.

Em tais condições, as cargas de cor podem percorrer distâncias maiores que os tamanhos hadrônicos originais e emergem como estados desconfinados de cor em um estado de plasma.

Além disso, espera-se que ocorra uma restauração da simetria quiral em potencial químico nulo, como sugerido *ab initio* por cálculos de QCD na rede [2] se a temperatura for aumentada suficientemente como podemos observar no painel inferior da Fig.(1.1). De acordo com estes cálculos, quando as interações diminuem em virtude da liberdade assintótica, a massa efetiva M dos quarks torna-se pequena (essa pequena massa residual é também chamada massa de corrente m) relativamente a uma fase simétrica quiral restaurada ¹.

Teoricamente, pelo menos perto da região de potencial químico nulo, parece que a restauração da simetria quiral ocorre aproximadamente na mesma temperatura em que se dá o desconfinamento de cor como se pode verificar comparando as respectivas susceptibilidades [6, 7, 8]. Este fato poderia ser a primeira evidência de um mecanismo desconhecido conectando o setor fermiônico da QCD aos campos de calibre de glúons.

1.2 O Diagrama de Fases da QCD

Tornou-se uma questão de grande discussão e polêmica, o estabelecimento do comportamento termodinâmico do plasma de quarks e glúons e a consequente definição de sua equação de estado (EoS). Conforme eleva-se a temperatura, a matéria nuclear torna-se fracamente ligada e em um dado valor de temperatura T , esta fase hadrônica evolui para um estado de plasma. Por outro lado, se a matéria hadrônica é sujeita a extremas pressões e densidades, a mesma transição de fases pode ocorrer.

As propriedades termodinâmicas extraídas do Modelo de Sacola do MIT podem nos dar uma visão aproximada do comportamento para a matéria hadrônica quente e densa. Estas propriedades indicam que o contorno de fases para a transição tem valores limitantes em torno de $100 < T < 120$ MeV e potencial químico $300 < \mu < 500$ MeV. No painel superior da Fig.(1.2), nós mostramos o diagrama de fases correspondente a um cálculo usando o Modelo de Sacola. Também nesta figura no painel inferior, apresentamos uma representação teórica

¹As estimativas para as massas físicas dos quarks up e down apresentam um pequeno valor finito ($m_u = 2.3^{+0.7}_{-0.5}$ MeV e $m_d = 4.8^{+0.5}_{-0.3}$ MeV) [5].

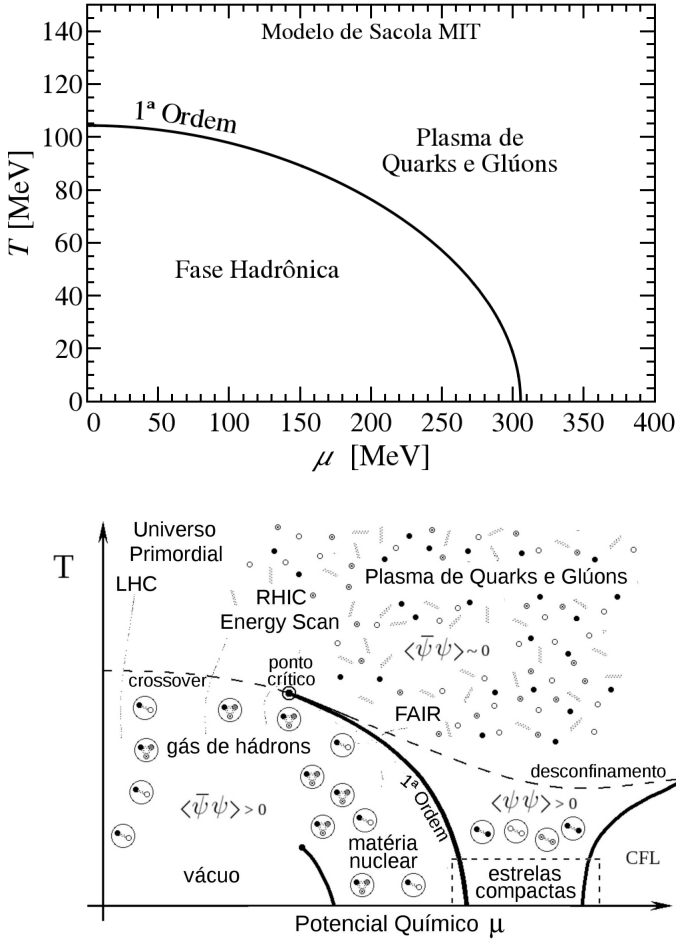


Figura 1.2: (Painel superior) Contorno de fase da QCD obtido a partir do Modelo de Sacola do MIT com valor de constante de sacola igual a $B = 57.5 \text{ MeV/fm}^3$. Podemos notar que a fase hadrônica evolui para uma fase de plasma a medida que aumentamos a temperatura e/ou potencial químico. (Painel inferior). Exemplo de um diagrama de fase esquemático provável para a matéria de quarks. Os estados hadrônicos de dois (mésons) ou três (bárions) quarks tornam-se desconfinados em temperaturas elevadas acima da linha de desconfinamento. Também espera-se que tal transição seja acompanhada por uma restauração parcial da simetria quiral.

para uma provável aparência geral do diagrama de fases da QCD. Podemos notar que o contorno de fases deve apresentar um perfil semelhante àquele previsto pelo Modelo de Sacola, entretanto, existem alguns aspectos adicionais a considerar.

Em primeiro lugar, questiona-se correntemente qual o tipo de transição de fase que ocorre nesta linha de contorno. De acordo com a classificação para transições de fases de Ehrenfest, nós podemos associar um dado parâmetro de ordem para acompanhar quais mudanças físicas ocorrem quando alteramos as variáveis termodinâmicas. As transformações podem ocorrer através de uma transição de fase de primeira ou segunda ordem, dependendo do comportamento apresentado pela energia livre termodinâmica do sistema e do número de sabores dos quarks. Se uma transição de primeira ordem ocorrer, a primeira derivada da energia livre é descontínua com respeito a um dado parâmetro de ordem. Neste caso, como veremos no capítulo 2, verifica-se a coexistência de fases e presença de calor latente sobre a linha de transição. Ou, se uma transição de segunda ordem ocorrer, a descontinuidade estará presente somente na segunda derivada da energia livre com respeito ao parâmetro de ordem escolhido. No entanto, em última análise, verificou-se a partir das avaliações de QCD na rede [9, 10, 11] em altas temperaturas e pequenas densidades (μ baixo) que, possivelmente, uma transição de fase de segunda ordem verdadeira não ocorre na realidade. Em vez disso, é mais provável, que a passagem da matéria hadrônica para a matéria de quarks ocorra por meio de uma lenta mudança de fase ou *crossover* na região de pequenos valores de potencial químico.

Por outro lado, de acordo com as previsões de modelos efetivos [12, 13], acredita-se que em pequenas temperaturas e potenciais químicos elevados a transição de fase seja possivelmente de primeira ordem. O modelo de sacola, por exemplo, nos fornece uma linha de transição de fase que é dominada pela primeira ordem como já mostrado na Fig.(1.2). Isso mostra que tal previsão do modelo de sacola não reproduz corretamente os resultados da rede que demonstram que em potencial químico pequeno ocorre um *crossover*. Se em baixos potenciais químicos nós encontramos um *crossover* ² e em valores elevados de potencial químico encontramos uma transição de primeira ordem, então, provavelmente, existe um ponto crítico (CP) limitando uma região de transição da outra. Especificamente no ponto crítico a transição é de segunda ordem. Desse modo, outro assunto em discussão corresponde a localização no plano $T - \mu$ de um possível ponto crítico

²Ou de segunda ordem no limite quiral.

[13].

Neste contexto, um dos principais parâmetros de ordem que se pode considerar é o condensado de quark-antiquark $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$, com o qual pode-se determinar a massa relativa ao agregado de um par $\bar{q}q$. Nas figuras Fig.(1.1) e Fig.(1.2), podemos observar que o valor esperado do condensado $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ decresce a valores próximos de zero quando a temperatura se eleva. Deste modo, a fase hadrônica pode ser caracterizada por valores não nulos do condensado $\langle \bar{\psi}\psi \rangle > 0$ e para o plasma de quarks e glúons seu valor aproxima-se de zero $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \sim 0$, relativamente a uma restauração aproximada da simetria quiral.

Teoricamente, existem outras possibilidades para a formação de condensados de quark além da configuração partícula-antipartícula $\bar{q}q$. A formação de estados emparelhados de quark-quark $\langle \psi\psi \rangle$ também é prevista, resultando, por exemplo, em uma fase supercondutora de cor. Outro parâmetro de ordem que tem sido correntemente usado é o *loop* de Polyakov, o qual está diretamente relacionado a transição de desconfinamento de cor [14].

1.3 Colisões Relativísticas de Íons Pesados

Embora existam dificuldades inerentes a investigação da matéria hadrônica nestes ambientes extremos, os experimentos de colisão de partículas podem nos fornecer uma grande quantidade de informação, permitindo obter suas principais características. Neste momento, grandes aceleradores de partículas estão funcionando continuamente na busca por evidências de uma possível formação do estado de plasma de quarks e glúons. Entre as instalações de pesquisa operando com este propósito, podemos relacionar o Colisor de Íons Relativísticos Pesados (RHIC cuja energia de centro de massa em uma colisão núcleo-núcleo é da ordem de $\sqrt{s_{NN}} = 200 \text{ GeV}$) no Laboratório Nacional de Brookhaven e o Grande Colisor de Hádrons (LHC $\sqrt{s_{NN}} = 13 \text{ TeV}$) na Organização Européia para Pesquisa Nuclear (*Organisation Européenne pour la Recherche Nucléaire* CERN). Convém citar também a Instalação para Pesquisa de Íons e Antiprótons (*Facility for Antiproton and Ion Research* FAIR $\sqrt{s_{NN}} = 200 \text{ GeV}$) em GSI *Helmholtzzentrum für Schwerionenforschung GmbH* que deve entrar em operação também futuramente.

Colidindo núcleos pesados (como $Au + Au$, $Pb + Pb$, $S + U$, $Cu + Cu$, etc) nestas escalas de energia, estes aceleradores são capazes de reproduzir condições de temperatura e densidade semelhantes às que existiram nos instantes iniciais do Universo. De acordo com as

teorias atuais a respeito da origem do Universo, a quantidade de partículas e antipartículas logo após o Big Bang era praticamente igual, o que significa que o potencial químico era praticamente nulo nesses instantes iniciais. Contudo, hoje toda a matéria que observamos é composta somente de partículas e a origem de tal assimetria ainda é um problema a ser solucionado. Conforme o Universo evoluiu, o potencial químico tornou-se não nulo em virtude do excesso de partículas sobre as antipartículas. Justamente, o potencial químico determinado experimentalmente relacionado à densidade da matéria nuclear nos núcleos mais densos (como o núcleo do chumbo) está em torno de $\mu \sim 310 \text{ MeV}$ ³. De acordo com os modelos efetivos, e.g. Modelo de Sacola do MIT, acredita-se que deve ocorrer uma transição de fase de desconfinamento dos quarks de um nucleon em um valor de potencial químico que é próximo destes valores.

Atualmente, medidas dos produtos de colisão nas instalações mencionadas tentam mapear o diagrama de fases da QCD. Após uma colisão, a temperatura decresce e o sistema formado resfria-se até um ponto onde as interações entre os hádrons cessam e as razões entre o número de partículas mantém-se fixas. Este ponto é denominado *freeze-out*. ⁴

Na Fig.(1.3), mostramos alguns resultados experimentais obtidos a partir de medidas de temperaturas de resfriamento (*freeze-out*) e potencial químico bariônico os quais podem ser extraídos das razões entre números de partículas emitidas nas colisões. Os dados apresentados correspondem a experimentos realizados desde a década de 90 nos aceleradores RHIC, SPS, AGS e SIS. Podemos comparar a similaridade existente entre este resultado experimental e as previsões dos modelos teóricos Fig.(1.2) cuja eficácia torna-se evidente. Atualmente, no RHIC vem sendo realizada uma varredura em energia no diagrama de fases da QCD, ou *Beam Energy Scan* BES de modo a mapear detalhadamente a região de potencial químico finito e verificar a possível localização do ponto crítico.

³Em termos do potencial químico bariônico, o qual corresponde ao triplo do potencial químico dos quarks $\mu_B = 3\mu$, temos equivalentemente $\mu \sim 930 \text{ MeV}$.

⁴Convém notar que existem dois tipos de *freeze-out*: o químico e o térmico. O *freeze-out* químico ocorre quando as abundâncias de hádrons tornam-se constantes. Enquanto o *freeze-out* térmico apenas marca o ponto onde as interações e espalhamentos não ocorrem mais e os hádrons tornam-se livres.

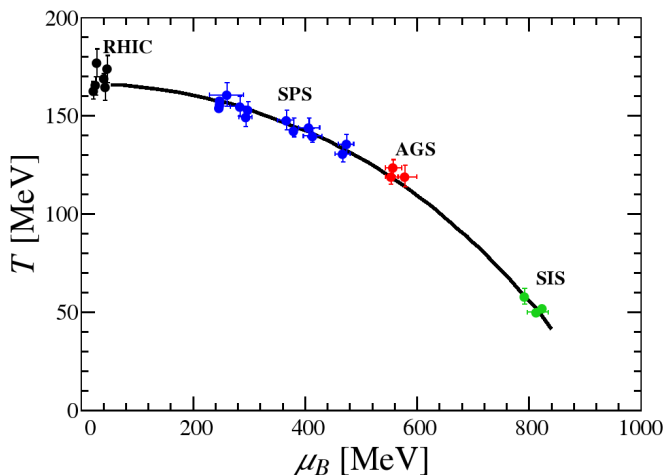


Figura 1.3: Parâmetros experimentais de *freeze-out* químico obtidos nos aceleradores LEP, SPS, AGS e SIS. A curva mostrada corresponde à parametrização $T(\mu_B) \approx 0.17 - 0.13\mu_B^2 - 0.06\mu_B^4$. Gráfico extraído da Ref. [15].

1.4 Implicações Astrofísicas

No final da década de 1960, Ivanenko and Kurdgelaidze [16] questionaram se nas elevadas densidades encontradas no interior de estrelas compactas seria possível a existência de núcleos formados pela matéria de quarks. Em contraste com as estrelas compactas comuns, sua estrutura estelar seria auto-sustentada pelo equilíbrio entre a interação forte e a interação gravitacional. Estas estrelas hipotéticas de quarks teriam sua estabilidade determinada por uma equação de estado, a qual em princípio, poderia ser obtida a partir de modelos efetivos da QCD.

Além disso, estrelas compactas girando rapidamente podem desenvolver um forte campo magnético [17, 18] da ordem de $10^{16} - 10^{18}$ G. A presença deste campo deve influenciar de modo significativo toda a dinâmica da matéria presente em seus núcleos e sua consideração teórica torna-se relevante. Também é possível que a matéria desconfinada de quarks no centro destas estrelas compactas apresente uma parcela de estranheza [19], dando lugar às assim chamadas estrelas estranhas. Portanto, a inclusão de graus de liberdade de estranheza pode também modificar as características da matéria hadrônica densa e quente.

De acordo com o cenário padrão do Big Bang, nos primeiros

segundos após a explosão cósmica, a temperatura atingiu elevados valores, permitindo a formação de um estado de plasma de quarks e glúons. A medida que o Universo expandiu e se esfriou, uma transição de fase para a matéria hadrônica daria origem as abundâncias conhecidas para os elementos leves. O estudo do diagrama de fases da QCD pode revelar alguns detalhes a respeito da história térmica do Universo e sobre a dinâmica que governa seus constituintes astronômicos.

A aplicação de métodos teóricos de teorias de campos nos permite prever e reproduzir as principais características destes objetos estelares e cosmológicos. Por meio da utilização de modelos efetivos à QCD podemos estudar as interações microscópicas dos quarks e assim obter as respectivas propriedades termodinâmicas destes estados da matéria. Podemos citar alguns destes modelos: o modelo de Nambu–Jona-Lasinio (NJL), que simula a simetria quiral da QCD; o modelo de Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio (PNJL), que corresponde a uma extensão ao modelo de NJL para incluir a propriedade de confinamento dos quarks nos hádrons; dentre outros. O modelo de NJL é bastante usado para investigar o diagrama de fases da QCD porque este modelo reproduz eficazmente muitas das propriedades esperadas para uma fase de plasma de quarks e glúons. No capítulo seguinte, vamos descrever a base formal desta teoria de campo efetiva e apresentaremos alguns de seus principais resultados numéricos mais conhecidos.

Capítulo 2

O Modelo de Nambu–Jona-Lasinio SU(2)

2.1 Teorias Efetivas para a QCD

Até o presente, sugere-se que uma descrição teórica completa dos sistemas hadrônicos seja dada pelo formalismo da Cromodinâmica Quântica (QCD). De acordo com essa teoria, todas as propriedades dinâmicas da interação forte são determinadas pela lagrangiana da QCD ¹

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}\mathcal{G}_{\mu\nu}^a\mathcal{G}_a^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - M)\psi . \quad (2.1)$$

onde nessa expressão $D_\mu = \partial_\mu - igT^a A_\mu^a$ é a derivada covariante de gauge para o campo glúônico, A_μ , dados os geradores, T^a , da álgebra de Lie e g é a constante de acoplamento da interação forte. Em contraste com o comportamento dos fótons na Eletrodinâmica Quântica (QED),

¹Neste trabalho, vamos empregar a notação das matrizes gama γ^μ na representação de Dirac.

o tensor de campo de gauge dos glúons, $\mathcal{G}_{\mu\nu}^a$, apresenta um caráter não abeliano expresso pelo termo de autoacoplamento dos glúons $A_\mu^b A_\nu^c$

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c . \quad (2.2)$$

Essa característica de autoacoplamento dos glúons torna a obtenção de soluções exatas neste formalismo é inviável pelos métodos até então conhecidos. Além disso, o valor elevado para a constante de acoplamento da QCD ($g > 1$) em pequenas transferências de momento (o que corresponde a pequenas distâncias de interação) inibe a aplicação do tratamento perturbativo para esta situação como aquele realizado na QED. Resultados exatos razoáveis para a QCD não perturbativa são correntemente extraídos de teorias de gauge na rede, mas esta estratégia, até o momento, ainda permanece com algumas dificuldades (como o problema do sinal [20]) quando é necessário incluir férmions em valores não nulos de potencial químico. Por outro lado, o mesmo mecanismo da liberdade assintótica pode nos proporcionar a possibilidade de estudar quarks na região de momento elevado, onde a constante de acoplamento torna-se tão pequena que os quarks podem ser vistos como partículas parcialmente livres em um regime de acoplamento fraco. Estas condições podem ser obtidas quando a matéria ordinária é aquecida e/ou comprimida em altas temperaturas e/ou densidades bariônicas. Dessa maneira, através de uma transição de fase, a matéria hadrônica pode se transformar em um estado de plasma com os quarks e glúons propagando-se livremente. O uso de modelos efetivos aplicados a QCD padrão pode transcender suas dificuldades matemáticas. Assim, é conveniente obter uma densidade de lagrangiana efetiva a qual apresente as mesmas características (simetrias) que \mathcal{L}_{QCD} mas que seja mais facilmente tratável.

2.2 Lagrangiana de Interação de NJL e suas Simetrias

Antes do advento da ideia dos quarks e mesmo do formalismo da QCD, um modelo aplicado a interação de nucleons foi publicado em dois artigos escritos por Nambu e Jona-Lasinio [21, 22]. Tal trabalho surgiu como uma possível explicação para os valores observados da massa do nucleon e para a constante de acoplamento pion-nucleon. No modelo de NJL, como foi posteriormente chamado, faz-se uso de uma analogia entre os campos fermiônicos autointeragentes e o mecanismo dinâmico de excitação de quasipartículas da teoria da supercondutividade.

O espectro de nucleons de Dirac pode ser analogamente compreendido com base no tratamento BCS de Bardeen, Cooper e Schrieffer para a supercondutividade [23]. Na teoria BCS, a deformação atômica na rede cristalina causada pela interação eletrônica pode levar a um efeito atrativo de emparelhamento de elétrons (pares de Cooper) [24]. Admite-se que esta interação elétron-rede-elétron seja a origem da diferença de energia (*gap*) observada entre o estado fundamental e os estados excitados. A interação de emparelhamento induz uma autoenergia responsável pelo aumento da massa efetiva dos nucleons M a qual pode ser maior que sua respectiva massa nua, m . Até mesmo se assumirmos o limite quiral onde $m = 0$, a massa efetiva M gerada dinamicamente ainda é grande o bastante para explicar a massa observada dos nucleons.

Seguindo tais argumentos, nós podemos interpretar estes campos fermiônicos (aqui representados pelo bispinor de Dirac, ψ) como graus de liberdade de quarks e assumir um novo ponto de partida para traçar o problema da dinâmica das interações fortes. O complicado intercâmbio de glúons entre quarks e antiquarks pode produzir uma força de atração, a qual pode ser efetivamente associada ao mecanismo que dá aos hádrons suas massas efetivas ($M \simeq M_B/3 \simeq 300$ MeV, onde M_B é a massa do bárion) e espontaneamente quebra a inerente simetria quiral $m = 0$. De modo a definir a lagrangiana de interação fundamental para este modelo efetivo, vamos considerar as simetrias relevantes que devem ser observadas. Primeiramente, o número de partículas interagentes (chamado número bariônico) deve ser conservado pela interação efetiva

$$N = \int \bar{\psi} \gamma_0 \psi d^3x . \quad (2.3)$$

Além disso, a simetria quiral deve ser recuperada quando estabelecermos $m = 0$, o que implica na conservação da quantidade chamada quiralidade

$$\chi = \int \bar{\psi} \gamma_0 \gamma_5 \psi d^3x . \quad (2.4)$$

A conservação da corrente bariônica $i\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ e da corrente quiral $\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$ deve estar presente na lagrangiana quando realizamos trans-

formações globais com fase arbitrária constante α

$$\begin{aligned}\psi' &\rightarrow \exp[i\alpha]\psi & \bar{\psi}' &\rightarrow \bar{\psi} \exp[-i\alpha] , \\ \psi' &\rightarrow \exp[i\alpha\gamma_5]\psi & \bar{\psi}' &\rightarrow \bar{\psi} \exp[i\alpha\gamma_5] .\end{aligned}\tag{2.5}$$

As seguintes quantidades modificam-se sob estas transformações como

$$\begin{aligned}\text{Escalar:} & (\bar{\psi}\psi)' \rightarrow \bar{\psi}\psi \cos 2\alpha + i\bar{\psi}\gamma_5\psi \sin 2\alpha \\ \text{Vetorial:} & (i\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)' \rightarrow i\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \\ \text{Pseudo-escalar:} & (i\bar{\psi}\gamma_5\psi)' \rightarrow i\bar{\psi}\gamma_5\psi \cos 2\alpha - \bar{\psi}\psi \sin 2\alpha \\ \text{Pseudovetorial:} & (i\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi)' \rightarrow i\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi \\ \text{Tensorial:} & (\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi)' \rightarrow \bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi \cos 2\alpha + i\bar{\psi}\gamma_5\sigma_{\mu\nu}\psi \sin 2\alpha .\end{aligned}\tag{2.6}$$

Logo concluímos que as formas bilineares invariantes são respectivamente as grandezas de caráter vetorial e pseudovetorial. No entanto, para que uma teoria descreva efetivamente as interações fortes a mesma precisa apresentar campos que determinem uma massa finita compatível com a realidade. Além disso, para estabelecer um formalismo consistente com a formação de estados ligados, não basta que haja apenas a invariância nestas transformações, mas também deve existir uma interação atrativa entre as partículas e antipartículas. De acordo com isso, Y. Nambu e G. Jona-Lasinio escolheram uma interação não linear semelhante à teoria de partículas elementares proposta por Heisenberg [25]. Em sua teoria, Heisenberg assume que as equações fundamentais de campo deveriam ser não lineares de modo a representar uma interação e que a massa deveria ser uma consequência da mesma. Pode-se verificar facilmente que a combinação quadrática, $(\bar{\psi}\psi)'^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\psi)'^2$, de covariantes bilineares é invariante sob tais transformações

$$\begin{aligned}(\bar{\psi}\psi)'^2 &\rightarrow (\bar{\psi}\psi)^2 \cos^2 2\alpha + 2i(\bar{\psi}\psi)(\bar{\psi}\gamma_5\psi) \cos 2\alpha \sin 2\alpha \\ &\quad + (\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2 \sin^2 2\alpha , \\ (i\bar{\psi}\gamma_5\psi)'^2 &\rightarrow (\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2 \cos^2 2\alpha - 2i(\bar{\psi}\gamma_5\psi)(\bar{\psi}\psi) \cos 2\alpha \sin 2\alpha \\ &\quad + (\bar{\psi}\psi)^2 \sin^2 2\alpha ,\end{aligned}\tag{2.7}$$

ou seja, isso demonstra que a combinação quadrática também é invariante

$$(\bar{\psi}\psi)'^2 + (i\bar{\psi}\gamma_5\psi)'^2 \rightarrow (\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2. \quad (2.8)$$

As particularidades do campo de gauge bosônico (glúons) A_μ^a que acopla aos campos fermiônicos (quarks), ψ , são efetivamente simuladas por uma não linearidade inerente do próprio acoplamento do campo fermiônico, resultando em uma interação puntual de contato. Considerando os fatos acima, podemos assumir uma densidade de lagrangiana para o modelo como

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi + G_S[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2], \quad (2.9)$$

onde $\vec{\tau}$ é o vetor composto pelas matrizes de Pauli que são definidas no espaço de isospin necessário para descrever os dois sabores de quarks leves (u, d). Os únicos parâmetros utilizados no modelo NJL são, respectivamente, a constante de acoplamento escalar G_S e a massa nua de corrente dos quarks, m .

No limite de baixas energias e longos comprimentos de onda, o modelo de NJL torna-se uma aproximação razoável para a QCD, porque nestas condições os graus de liberdade dos glúons ainda estariam adormecidos nas interações puntuais. Assim como a teoria de Fermi para o decaimento β , a interação de quatro férmions puntual de NJL é uma teoria não renormalizável. Isso significa que o caráter puntual das interações nesta teoria efetiva deve resultar em divergências, as quais não podem ser facilmente removidas por meio da redefinição dos parâmetros originais da teoria para torná-la finita.

No caso do modelo de NJL em (3+1)d, as combinações de operadores de campo na lagrangiana, Eq.(2.9), determinam que a constante de acoplamento G_S deve ter dimensões de fm^2 (ou MeV^{-2}). Os critérios de renormalizabilidade [26, 27] garantem que uma teoria é renormalizável se a constante de acoplamento possui dimensão de comprimento com expoente menor ou igual a zero, o que não é o caso no modelo de NJL. Uma teoria não renormalizável requer uma quantidade infinita de contratermos para cancelar todas as divergências que cresceriam indefinidamente em quantidade. Dessa maneira, seria necessária uma quantidade infinita de parâmetros livres na teoria o que a tornaria inútil. Ao conceder ao formalismo de NJL o papel de uma teoria efetiva, podemos estabelecer que o modelo é apenas válido até determinado limite máximo característico de energia. Geralmente, limita-se a energia por meio de um corte (*cutoff*, Λ) no momento das partículas. o qual é acrescentado como regulador de divergência (procedimento de regularização).

Como será visto na seção 2.6, os parâmetros livres da teoria (m , G_S e Λ) são usualmente fixados ajustando adequadamente os valores de observáveis fenomenológicos como a massa do pion, m_π , a constante de decaimento do pion, f_π , e o valor esperado do condensado de quarks no vácuo, $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$. A interpretação da interação de NJL em termos dos diagramas de Feynman pode ser vista na próxima Fig.(2.1), onde o caráter de interação 4-puntual torna-se evidente. A diferença entre os canais escalar e pseudo-escalar está restrita apenas ao cálculo do vértice.

Diferentemente do emparelhamento BCS elétron-elétron em supercondutores, o modelo de NJL aplicado a QCD resulta em uma condensação de pares entre uma partícula, ψ , e sua antipartícula, $\bar{\psi}$. Este estado composto na linguagem da teoria BCS é usualmente chamado de uma quase partícula. Pares de Cooper envolvendo a atração partícula-partícula aparecem na QCD quando introduzimos a hipótese de condensados diquark para a formação de um estado supercondutor de cor. Quando as interações são incluídas, verifica-se que tais sistemas de férmions assintoticamente livres adquirem massa através do mecanismo de quebra dinâmica de simetria [28].

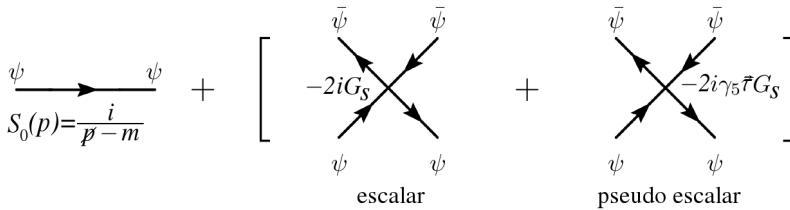


Figura 2.1: Diagramas de Feynman em nível de árvore implícitos na lagrangiana de Nambu–Jona-Lasinio. O primeiro termo da soma representa a propagação de um férmion livre. O segundo termo, corresponde a interação de um férmion com um antiférmion por meio de um vértice escalar. O último termo refere-se a interação férmion-antiférmion através de um vértice pseudo-escalar

2.3 A Transformação de Bogoliubov-Valatin

De modo a obter a massa efetiva gerada dinamicamente, podemos empregar o procedimento original de Bogoliubov-Valatin na obtenção da equação de *gap* de massa para a teoria da supercondutividade. Considerando inicialmente um sistema fermiônico de quarks e antiquarks não interagentes e sem massa em um volume unitário, um campo $\psi(\mathbf{x}, t)$

representando estas partículas pode ser escrito como uma representação de Fourier em termos dos operadores de aniquilação $b_{\vec{p},s}$ e criação $d_{\vec{p},s}^\dagger$ no instante $t = 0$ como

$$\psi(\vec{x}, 0) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [b_{\vec{p},s} u_{\vec{p},s} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + d_{\vec{p},s}^\dagger v_{\vec{p},s} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}] , \quad (2.10)$$

onde os espinores $u_{\vec{p},s}$ e $v_{\vec{p},s}$ são autoestados da helicidade s :

$$\begin{aligned} \not{p} u_{\vec{p},s} &= 0 , \\ \not{p} v_{\vec{p},s} &= 0 . \end{aligned} \quad (2.11)$$

Na técnica de Bogoliubov, o vácuo perturbativo desemparelhado $|0\rangle$ de férmions $\psi(\mathbf{x}, t)$ propagando-se livremente é rotacionado na presença da fraca interação atrativa de emparelhamento de NJL $G_S[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2]$. Essa rotação nos leva a outro estado fundamental o qual pode ser expresso em termos de uma solução variacional de vácuo não trivial [29]

$$|\text{vac}\rangle = \prod_{\vec{p},s} [\cos\theta_s(\vec{p}) + s \sin\theta_s(\vec{p}) b_{\vec{p},s}^\dagger d_{-\vec{p},s}^\dagger] |0\rangle . \quad (2.12)$$

Tal *ansatz* para o estado fundamental representa um estado coerente de pares $\psi\bar{\psi}$ com momento e helicidade totais nulos. Sua correspondente aniquilação ocorre por meio da aplicação de novos operadores de quase partícula $B_{\vec{p},s}$ and $D_{\vec{p},s}$ de Bogoliubov-Valatin definidos como

$$\begin{aligned} B_{\vec{p},s} &= \cos\theta_s(\vec{p}) b_{\vec{p},s} + s \sin\theta_s(\vec{p}) d_{-\vec{p},s}^\dagger , \\ D_{\vec{p},s} &= \cos\theta_s(\vec{p}) d_{\vec{p},s} - s \sin\theta_s(\vec{p}) b_{-\vec{p},s}^\dagger . \end{aligned} \quad (2.13)$$

Na presença da interação hamiltoniana quiral de NJL característica

$$\mathcal{H} = -i\bar{\psi}\gamma_i\partial^i\psi - G_S[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2] , \quad (2.14)$$

podemos calcular o valor esperado para a energia total $W = \langle \text{vac} | \mathcal{H} | \text{vac} \rangle$ relativamente a um ângulo arbitrário de rotação $\phi(p) = 2\theta(\vec{p})$ no sistema de quarks contendo N_c número de cores e N_f número de diferentes sabores

$$W[\phi] = -2N_c N_f \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p \cos\phi(p) - 4G_S(N_c N_f)^2 \left[\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sin\phi(p) \right]^2 . \quad (2.15)$$

Para encontrar a massa adquirida dinamicamente pelo condensado, a seguinte condição de minimização variacional deve ser satisfeita

$$\frac{\delta W}{\delta \phi(p)} = 0 , \quad (2.16)$$

a qual resulta na seguinte expressão

$$p \tan \phi(p) = 4G_S N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sin \phi(p) . \quad (2.17)$$

O ângulo $\phi(p)$ indica o quanto a energia total projeta-se ao longo da massa constante gerada M

$$\sin \phi(p) = \frac{M}{\sqrt{p^2 + M^2}} = \frac{M}{E_p} \quad \text{e} \quad \tan \phi(p) = \frac{M}{p} . \quad (2.18)$$

Assim, deduzimos a chamada equação de *gap* de massa, a qual oferece a configuração de mínimo para a energia total:

$$M = 4G_S N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{M}{\sqrt{p^2 + M^2}} . \quad (2.19)$$

Se na interação hamiltoniana de NJL Eq.(2.14) for incluída uma massa de corrente m não nula para os quarks, devemos apenas adicionar esta constante a equação acima. Como dito no início desta seção, a técnica de Bogoliubov-Valatin foi utilizada inicialmente na teoria da supercondutividade para obter a respectiva equação do *gap*. Aqui, introduzimos essa maneira alternativa apenas para delinear o desenvolvimento histórico que culminou na concepção do modelo de NJL.

2.4 Autoenergia na Aproximação de Campo Médio

Infelizmente, o método variacional de Bogoliubov é difícil de ser aplicado quando tentamos estender o conceito de quase partículas na presença de outros efeitos externos, como temperatura finita e densidade de partículas. Em vez disso, é costume empregar ferramentas matemáticas mais apropriadas as quais usam funções de Green para teorias de muitos corpos (veja [30]). Com este método pode-se obter o mesmo resultado encontrado na seção anterior para a equação de *gap* de massa.

Na aproximação de campo médio (MFA) [30], a massa do férmion (quark) gerada dinamicamente vem de sua interação com todas as outras partículas restantes do sistema. Cada férmion propaga-se em um potencial de partícula independente e “enxerga” todas as outras partículas sendo aproximadas por uma interação de campo médio que permeia todo o volume considerado. Este procedimento é equivalente a outros métodos como a aproximação de Hartree (HA) e a expansão em N_c -grande (LN_c). Deste ponto de vista, um cálculo da massa do férmion consiste simplesmente em avaliar a autoenergia correspondente que é induzida por tal campo médio circundante. As principais contribuições para a autoenergia relativas a um quark propagando-se com massa nua m usando a HA em primeira ordem diagramática que devemos considerar são mostradas na Fig. 2.2

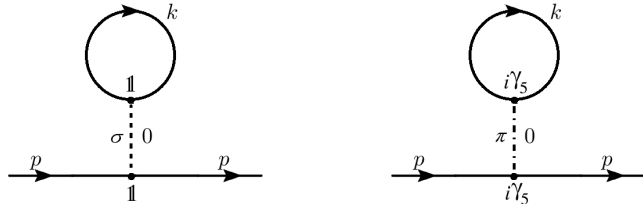


Figura 2.2: Contribuições de primeira ordem na autoenergia para a massa de um quark na aproximação de Hartree.

Um quark propagando-se como partícula independente entre dois pontos x e x' no espaço-tempo é caracterizado por uma função de Green do propagador $iS(x, x') = \langle T\bar{\psi}(x)\psi(x') \rangle$ temporalmente ordenada. Logo, a equação de Dirac que deve ser satisfeita com a massa renormalizada de autoenergia $\Sigma = M$ pode ser escrita como

$$(i\partial - \Sigma)S(x, x') = \delta^{(4)}(x - x') . \quad (2.20)$$

A saber, a solução desta equação deve ser o propagador para o quark vestido $S(p) = i(\not{p} - M)^{-1}$ com o valor de massa característica M . Para a lagrangiana de NJL, ambos os vértices de interação $(\bar{\psi}\psi)^2$ (escalar) e $(\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2$ (pseudo-escalar) contribuem para a totalização da autoenergia Σ .

Para o canal escalar, o termo de Hartree permite um certo número de possibilidades de emissão e absorção de quarks pelo *quantum* bosônico de interação. Isto ocorre porque o laço de quark implícito deve variar nos espaços de cor, sabor e espinor. Assim, devemos avaliar os respectivos traços

$$\Sigma^s = 2G_S \text{Tr} [iS(x, x)] \quad \text{escalar} \quad (2.21)$$

Se considerarmos o acoplamento pseudo-escalar, o correspondente termo de autoenergia de Hartree difere do termo escalar apenas por um fator quadrático de $i\gamma_5 \vec{\tau}$

$$\Sigma^{ps} = 2G_S i\gamma_5 \vec{\tau} \text{Tr} [iS(x, x)] i\gamma_5 \vec{\tau} \quad \text{pseudo-escalar} \quad (2.22)$$

O cálculo dos traços relativamente aos graus de liberdade de cor e sabor nos mostra que o termo pseudo-escalar não contribui na HA porque $\text{Tr}(\gamma_5 \vec{\tau}) = 0$. Calculando o traço do termo escalar de Hartree dará o seguinte resultado para a massa total

$$\Sigma = m + 2iG_S N_c N_f \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} S(p) . \quad (2.23)$$

Inserindo o propagador correspondente ao quark vestido $S(p)$, chegamos a um resultado semelhante ao obtido com o formalismo BCS

$$M = m + i8G_S N_c N_f \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{M}{(p^2 - M^2)} . \quad (2.24)$$

A principal diferença entre estes dois resultados, Eq.(2.24) e Eq.(2.19), é a dependência na energia, (p^0) , a qual não é levada em consideração na expressão de Bogoliubov-Valatin. Esta integração adicional na energia (ou mais precisamente no tempo) irá permitir a inclusão de efeitos de temperatura finita e o estudo do comportamento dos condensados de quarks em função desta. A equação do *gap* pode ser associada a equação de Dyson para o propagador do quark vestido, onde os respectivos diagramas são mostrados na Fig.(2.3)

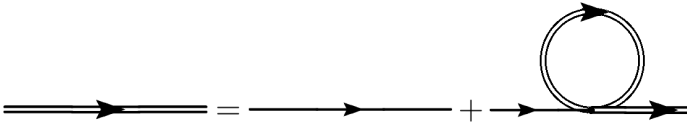


Figura 2.3: Equação diagramática de Dyson para o propagador do quark vestido. A linha fina representa a massa nua, m , e a linha espessa no laço está relacionada à correção de massa de Hartree.

A linha fina representa o propagador nu $S_0(p) = i(\not{p} - m)^{-1}$ para o quark com massa de corrente, m , e a linha espessa do laço de quark está para o excesso de massa gerada dinamicamente pelo termo de autointeração de Hartree.

2.5 Matéria de Quarks Quente e Densa

Para estudar a dependência do condensado de quarks com a temperatura, T , e densidade de partículas, ρ , precisamos considerar o formalismo e técnicas desenvolvidas pelas chamadas teorias de campo em temperaturas finitas [31]. As propriedades termodinâmicas de um *ensemble* de partículas fermiônicas são completamente determinadas pela definição de uma função de partição $\mathcal{Z}(\mu, T, V)$ sobre as correspondentes médias térmicas

$$\mathcal{Z}(T, V) = \text{Tr} \exp[-\beta \hat{H}] = \sum_n \langle \psi_n | e^{-\beta \hat{H}} | \psi_n \rangle, \quad (2.25)$$

onde β é definido como o inverso da temperatura, $1/T$. Como pretendemos incluir efeitos de densidade finita, é comum associar um dado potencial químico μ ao custo energético relativo a inclusão de N partículas no volume V do sistema com hamiltoniana H

$$\mathcal{Z}(\mu, T, V) = \text{Tr} \exp[-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})] = \sum_n \langle \psi_n | e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} | \psi_n \rangle. \quad (2.26)$$

Os observáveis termodinâmicos que podem ser obtidos a partir desta função de partição são

$$\text{a pressão,} \quad P(\mu, T) = T \frac{\ln \mathcal{Z}}{V},$$

$$\text{a densidade de entropia,} \quad s(\mu, T) = \frac{S}{V} = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\mu,$$

$$\text{a densidade de número de partículas,} \quad \rho(\mu, T) = \frac{N}{V} = \left(\frac{\partial P}{\partial \mu} \right)_T,$$

$$\text{e a densidade de energia,} \quad \varepsilon(\mu, T) = \frac{E}{V} = -P + Ts + \mu\rho. \quad (2.27)$$

A energia interna infinitesimal $dE(S, V, N) = -PdV + TdS + \mu dN$ assumida pelo sistema termodinâmico cresce quando a diferença entre o número de partículas e antipartículas aumenta por dN , segundo a seguinte razão

$$\mu = \left(\frac{\partial E}{\partial N} \right)_{S, V}. \quad (2.28)$$

Em baixas temperaturas ($T \rightarrow 0$), o arranjo destas partículas fermiônicas de *spin* $1/2$ é determinado pelo princípio da exclusão de Pauli e os estados de energia são preenchidos até o nível de Fermi, ε_F . Caso seja produzido um excesso (ou *déficit*) em uma das espécies de partículas, a repulsão de Pauli garante sua respectiva porção de energia μdN . Quando a temperatura se eleva, os estados de energia além do nível de Fermi são ocupados. Além disso, um consequente aumento nas possíveis configurações de microestados resulta em valores não nulos de entropia.

Quando se utiliza o formalismo de integrais de trajetória de Feynman da teoria quântica de campos, a principal ferramenta usada para calcular as amplitudes de transição $\langle \psi_n(0, \vec{x}) | e^{-iHt} | \psi_n(0, \vec{x}) \rangle$ é o gerador funcional $Z[\eta(x), \bar{\eta}(x)]$

$$\begin{aligned} Z[\eta(x), \bar{\eta}(x)] &= \langle \psi_n | e^{-iHt} | \psi_n \rangle_{\eta, \bar{\eta}} \\ &= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left\{ -i \int_0^t dt \int d^3x [\mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}) + \eta \psi \bar{\eta} \psi] \right\}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde $\eta(x)$, $\bar{\eta}(x)$ são fontes externas para criação de partículas ou antipartículas, respectivamente. O símbolo \mathcal{D} representa os produtos de medidas funcionais de integração nos campos fermiônicos

$$\mathcal{D}\psi = \prod_i d\psi_i(x_i). \quad (2.30)$$

Para partículas de Dirac, os campos $\psi(x_i)$ e $\bar{\psi}(x_i)$ são variáveis Grassmanianas cujos valores devem obedecer certas relações de anticomutação para preservar o caráter espinorial das soluções da equação de Dirac. Torna-se uma simples observação estabelecer que as equações Eq.(2.25) e Eq.(2.29) representam a mesma quantidade física. Comparando estas expressões, concluímos que uma substituição conveniente da variável de integração no tempo imaginário $\tau = it$ pelo inverso da

temperatura β nos conduz a tal identificação. Assim, a relação existente entre a função de partição termodinâmica \mathcal{Z} e o gerador funcional Z da teoria quântica de campos é obtida através da associação ²

$$it \rightarrow \frac{1}{T} . \quad (2.31)$$

Na sequência, usaremos estas definições formais da teoria térmica de campo para estudar o modelo efetivo de NJL aplicado a matéria de quarks em condições ambientes de elevada temperatura e densidade.

2.5.1 NJL em Temperatura e Densidade Finitas

Podemos obter um potencial termodinâmico $\Omega(\mu, T, M)$ pelo uso de técnicas diagramáticas da teoria térmica de campo, de modo que sua relação com a função de partição seja a seguinte

$$\mathcal{Z} = e^{-\Omega/(TV)} . \quad (2.32)$$

A pressão $P(\mu, T, M)$ também pode ser calculada usando a primeira equação escrita em Eq.(6.2)

$$\Omega(\mu, T, M) = -P(\mu, T, M) . \quad (2.33)$$

Assumindo a densidade de lagrangiana de NJL Eq.(2.9) no formalismo de integrais de trajetória Eq.(2.29), podemos escrever o gerador funcional Z como

$$Z = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left\{ -i \int_0^t dt \int d^3x [\bar{\psi}(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi \right. \\ \left. + G_S[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5 \vec{\tau}\psi)^2] + \eta\psi\bar{\eta}\psi] \right\} . \quad (2.34)$$

Ao conectar o sistema a um reservatório de partículas temos que a densidade de hamiltoniana original de NJL decresce de uma quantidade de energia μN , como discutido antes. Como a densidade no número de partículas ρ é calculada como $\psi^\dagger \psi$ temos o seguinte gerador funcional, calculado em densidade finita

$$Z = \text{Tr} \exp \left[-\frac{1}{T} \int d^3x (\hat{\mathcal{H}} - \mu \psi^\dagger(x)\psi(x)) \right] . \quad (2.35)$$

²veja por exemplo o capítulo 17 de [32]

Assim, em termos de uma formulação lagrangiana, significa que a energia no termo cinético é deslocada por

$$\psi^\dagger \psi \mu \rightarrow \bar{\psi} \gamma^0 \mu \psi \rightarrow \bar{\psi} i \overbrace{(\gamma_0 \partial^0 + \gamma_i \partial^i)}^{\text{desvio na energia}} \psi + \bar{\psi} \gamma_0 \mu \psi , \quad (2.36)$$

ou de modo equivalente, as frequências ω relativas aos estados permitidos de energia são deslocadas por uma fase imaginária

$$p_0 \rightarrow i(\omega - i\mu) . \quad (2.37)$$

2.5.2 Versão Bosonizada da Lagrangiana de NJL

Mesmo como uma teoria efetiva à QCD, a solução não linear do modelo de NJL ainda permanece um problema difícil. As não linearidades dos campos fermiônicos impedem qualquer maneira simples de se encontrar o gerador funcional dado pela Eq.(2.34). O procedimento de bosonização é uma tentativa de simplificar esta tarefa, tratando estes campos fermiônicos interagentes como estados bosônicos condensados.

Como vimos antes, a interação de NJL efetivamente contém bilineares quadráticos os quais simulam e escondem os efeitos de um acoplamento de campo de calibre inerente. Dessa maneira, interpretamos os dois canais de interação $(\bar{\psi}\psi)^2$ e $(\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2$ em termos da aproximação de campo médio. A interação entre os quarks no difícil problema de muitos corpos é substituída pela ação de campos efetivos médios (condensados) agindo externamente em cada quark. Linearizando estes vértices de quatro férmions podemos considerar o aparecimento dos condensados $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ e $\langle\bar{\psi}\gamma_5\vec{\tau}\psi\rangle$

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}\psi - \langle\bar{\psi}\psi\rangle)^2 &= (\bar{\psi}\psi)^2 - 2\langle\bar{\psi}\psi\rangle\bar{\psi}\psi + \langle\bar{\psi}\psi\rangle^2 , \\ (\bar{\psi}i\gamma^5\vec{\tau}\psi - \langle\bar{\psi}\gamma^5\vec{\tau}\psi\rangle)^2 &= (\bar{\psi}i\gamma^5\vec{\tau}\psi)^2 - 2\langle\bar{\psi}\gamma^5\vec{\tau}\psi\rangle\bar{\psi}i\gamma^5\vec{\tau}\psi + \langle\bar{\psi}\gamma^5\vec{\tau}\psi\rangle^2 , \end{aligned} \quad (2.38)$$

onde quaisquer diferenças de ordem quadrática entre o campo médio dos condensados e os valores do campo de quarks interagentes são negligenciadas $(\bar{\psi}\psi - \langle\bar{\psi}\psi\rangle)^2 \sim 0$ e $(\bar{\psi}i\gamma^5\vec{\tau}\psi - \langle\bar{\psi}\gamma^5\vec{\tau}\psi\rangle)^2 \sim 0$. Assim, podemos encontrar as seguintes expressões

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}\psi)^2 &\approx 2\langle\bar{\psi}\psi\rangle\bar{\psi}\psi - \langle\bar{\psi}\psi\rangle^2 , \\ (\bar{\psi}i\gamma^5\vec{\tau}\psi)^2 &\approx 2\langle\bar{\psi}\gamma^5\vec{\tau}\psi\rangle\bar{\psi}i\gamma^5\vec{\tau}\psi - \langle\bar{\psi}\gamma^5\vec{\tau}\psi\rangle^2 . \end{aligned} \quad (2.39)$$

Ao multiplicar as aproximações acima pela constante de acoplamento temos

$$\begin{aligned} G_S(\bar{\psi}\psi)^2 &\approx 2G_S\langle\bar{\psi}\psi\rangle\bar{\psi}\psi - G_S\langle\bar{\psi}\psi\rangle^2, \\ G_S(\bar{\psi}i\gamma^5\psi)^2 &\approx 2G_S\langle\bar{\psi}\gamma^5\vec{\tau}\psi\rangle\bar{\psi}i\gamma^5\psi - G_S\langle\bar{\psi}\gamma^5\vec{\tau}\psi\rangle^2. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Podemos considerar dois bilineares de campo, um relativo ao condensado escalar quark-antiquark $\sigma = -2G_S\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ e outro devido simplesmente ao condensado pseudo-escalar $\vec{\pi} = -2G_S\langle\bar{\psi}\gamma^5\vec{\tau}\psi\rangle$. Estes campos auxiliares usualmente nomeados como σ e $\vec{\pi}$, são implementados de modo a representar as trocas dos mésons sigma e pion respectivamente. Como uma teoria mesônica efetiva, a interação SU(2) de Nambu–Jona-Lasinio pode assim ser interpretada em termos de graus de liberdade fermiônicos que eventualmente condensam em estados bosônicos de méson. Substituindo as aproximações acima para $(\bar{\psi}\psi)^2$ e $(\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2$ na lagrangiana de NJL, Eq.(2.9), encontramos a sua versão bosonizada

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4G_S}(\sigma^2 + \pi^2) - (\sigma\bar{\psi}\psi + \bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}\psi). \quad (2.41)$$

Por outro lado, é possível chegar a essa versão bosonizada adicionando livremente um termo bosônico quadrático na lagrangiana, Eq.(2.9), sem modificar as equações de movimento

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4G_S}(\sigma + 2G_S\bar{\psi}\psi)^2, \\ &\frac{1}{4G_S}(\vec{\pi} + 2G_S\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2, \end{aligned} \quad (2.42)$$

Um cálculo posterior dos condensados de quark-antiquark nos mostra que somente o condensado escalar sobrevive e que aquele referente ao acoplamento pseudo-escalar se anula porque $Tr(\gamma_5\gamma_\mu) = 0$ e $Tr(\gamma_5\mathbb{1}) = 0$

$$\begin{aligned} \sigma &\equiv \langle\bar{\psi}\psi\rangle = \text{Tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} - M}{p^2 - M^2} = -\text{Tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{M}{p^2 - M^2}, \\ \vec{\pi} &\equiv \langle\bar{\psi}\gamma^5\vec{\tau}\psi\rangle = \text{Tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \gamma^5 \frac{\not{p} - M}{p^2 - M^2} = 0, \end{aligned} \quad (2.43)$$

onde a contribuição do canal do pion se anula como já havíamos discutido.

2.5.3 O Potencial Termodinâmico e a Equação do Gap

Como o condensado pseudo-escalar é nulo, assume-se a lagrangiana Eq.(2.41) dependendo apenas do campo σ , com o cálculo restrito ao plano $\pi = 0$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}[i\partial - (m + \sigma)]\psi - \frac{\sigma^2}{4G_S} . \quad (2.44)$$

Aplicando adequadamente as regras de Feynman aos diagramas representados na Fig.(2.3) nós encontramos o seguinte

$$\Omega(\sigma) = \frac{\sigma^2}{4G_S} - i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \{ \ln [\not{p} - (m + \sigma)] \} . \quad (2.45)$$

Avaliando o traço da expressão acima e usando a identidade $\text{Tr}[\ln(\not{Q} - M)] = \ln[\text{Det}(\not{Q} - M)] = 2N_c N_f \ln(Q^2 - M^2)$ [33], todas as possibilidades no laço de Hartree são consideradas e encontramos

$$\Omega(\sigma) = \frac{\sigma^2}{4G_S} + i2N_c N_f \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln[p^2 - (m + \sigma)^2] . \quad (2.46)$$

A soma da massa nua m e com o valor esperado do campo médio σ gera a massa efetiva total $M = m + \bar{\sigma}$, a qual é associada ao condensado quark-antiquark. Compare esta expressão para a massa efetiva com o diagrama da Fig(2.3). O valor particular $\bar{\sigma}$ assumido pelo campo médio genérico σ estabelece o valor da contribuição de autoenergia. Tal valor $\bar{\sigma}$ assumido pelo campo auxiliar σ pode ser determinado através de uma condição de minimização da energia livre termodinâmica Ω

$$\left. \frac{d\Omega}{d\sigma} \right|_{\bar{\sigma}} = 0 = \frac{\bar{\sigma}}{2G_S} - i4N_c N_f \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{(m + \bar{\sigma})}{[p^2 - (m + \bar{\sigma})^2]} . \quad (2.47)$$

Substituindo o valor médio, $\bar{\sigma} = M - m$, na expressão acima nos fornece

$$\frac{(M - m)}{2G_S} - i4N_c N_f \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{M}{[p^2 - M^2]} = 0 , \quad (2.48)$$

e a partir disso encontramos a condição autoconsistente para a massa efetiva

$$M = m + i8G_S N_c N_f \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{M}{(p^2 - M^2)} . \quad (2.49)$$

Com a solução iterada desta equação, o valor da massa efetiva M pode ser encontrado e substituído novamente na função de partição, Eq. (2.46). Assim, no ponto de mínimo, temos

$$\Omega(\mu, T, M) = \frac{(M - m)^2}{4G_S} + i2N_c N_f \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln[p^2 - M^2] . \quad (2.50)$$

2.5.4 Modos de Matsubara em Temperatura e Densidade Finitas

Agora, os efeitos de um banho térmico são introduzidos pela substituição usual do tempo imaginário pelo inverso da temperatura. De acordo com a teoria térmica de campo, somente as frequências discretas de Matsubara, ω_ν , devem fornecer as corretas condições de contorno antiperiódicas $\psi(\tau = 0, \vec{x}) = -\psi(\tau = \beta, \vec{x})$ necessárias para tornar esta correspondência válida

$$\omega_\nu = \frac{(2\nu + 1)\pi}{\beta} \quad (\text{férmions}) . \quad (2.51)$$

A integral no tempo imaginário é substituída pela soma de Matsubara [31] sobre estes modos permitidos e o vetor quadrimomento torna-se $p \equiv (i\omega_\nu, \vec{p})$

$$\Omega = \frac{(M - m)^2}{4G_S} - 2N_c N_f T \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \ln[\omega_\nu^2 + p^2 + M^2] . \quad (2.52)$$

Considerando um meio denso através da substituição dada pela Eq.(2.37), somos capazes de introduzir a dependência no potencial químico

$$\Omega = \frac{(M - m)^2}{4G_S} - 2N_c N_f T \oint \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \ln[(\omega_\nu - i\mu)^2 + E^2] . \quad (2.53)$$

A integral acima na soma infinita de frequências de Matsubara $\sum_\nu (\omega_\nu^2 + x^2)$ deve ser divergente. No entanto, podemos separar esta divergência (devida ao termo de vácuo que é proporcional a E) e deixar

a contribuição térmica convergente. Este resultado pode ser encontrado em muitos livros-texto [32, 34] como

$$T \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \ln[(\omega_\nu - i\mu)^2 + E^2] = E + T \ln[1 + e^{-(E+\mu)/T}] + T \ln[1 + e^{-(E-\mu)/T}] . \quad (2.54)$$

Inserindo esta identidade no potencial termodinâmico chega-se a

$$\Omega = \frac{(M - m)^2}{4G_S} - 2N_c N_f \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \left\{ E + T \ln[1 + e^{-(E+\mu)/T}] \right. \\ \left. + T \ln[1 + e^{-(E-\mu)/T}] \right\} . \quad (2.55)$$

O mesmo procedimento formal pode ser aplicado a equação Eq.(2.49)

$$M = m + 2 \cdot 4G_S N_c N_f \oint \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{M}{(p^2 - M^2)} , \quad (2.56)$$

por meio do uso da derivada logarítmica de Matsubara

$$\frac{d}{dx} \sum_{\nu} \ln(\omega_\nu^2 + x^2) = 2 \sum_{\nu} \frac{x}{(\omega_\nu^2 + x^2)} , \quad (2.57)$$

e assim obtemos a seguinte equação do *gap*

$$M = m + 4G_S N_c N_f \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{M}{E_p} \left[1 - n_p(\mu, T, M) - \bar{n}_p(\mu, T, M) \right] , \quad (2.58)$$

onde os efeitos de um banho térmico e de um reservatório de partículas são facilmente vistos pela diferença com a expressão Eq.(2.19) causada pelos números de ocupação de Fermi, n_p , (excesso de partículas) and, \bar{n}_p , (excesso de antipartículas)

$$n_p(\mu, T, M) = \frac{1}{1 + e^{(E_p - \mu)/T}} \quad \bar{n}_p(\mu, T, M) = \frac{1}{1 + e^{(E_p + \mu)/T}} . \quad (2.59)$$

A partir das equações Eqs.(6.2) verifica-se que a densidade do número de partículas no sistema é dada pela derivada

$$\rho = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right)_T . \quad (2.60)$$

O excesso em uma das espécies de partícula-antipartícula é contabilizado pela diferença entre os números de ocupação

$$\rho(\mu, T, M) = 2N_c N_f \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \left[n_p(\mu, T, M) - \bar{n}_p(\mu, T, M) \right]. \quad (2.61)$$

2.5.5 Regularização das Integrais Divergentes

Como discutido antes, conseguimos simular eficazmente algumas propriedades da QCD no modelo (3+1)d de NJL através da introdução de interações efetivas de contato. Em função disso, esta teoria carrega consigo um problema sistêmico de não renormalizabilidade o qual deve ser submetido a um processo de regularização. Das equações Eqs.(2.55), (2.58) e (2.62) podemos observar que a contribuição de vácuo proporcional a E no primeiro termo das integrais deve divergir quando tomamos o limite $p \rightarrow \infty$. De modo a evitar este inconveniente, podemos resolver esta parte das integrais fazendo uso de algum esquema de regularização [29, 35]. Existem muitos esquemas de regularização distintos que podemos adotar para superar este problema matemático de convergência. Particularmente, neste trabalho, as integrais divergentes serão avaliadas estabelecendo um *cutoff* não covariante, Λ , no valor do momentum e as integrais envolvendo termos exponenciais decrescentes devem convergir.

2.5.6 NJL em Temperatura Nula e Densidade Finita

Quando a temperatura vai a zero, a distribuição de Fermi fica caracterizada por uma função degrau de Heaviside, apresentando uma descontinuidade em $\mu = E_F$. Sem as contribuições térmicas, o potencial químico deve ser dado pela energia de Fermi, E_F , do sistema. Assim, neste limite, o potencial termodinâmico torna-se

$$\Omega = \frac{(M - m)^2}{4G_S} - 2N_c N_f \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \left[E + (\mu - E)\Theta(\mu - E) \right]. \quad (2.62)$$

A determinação desta expressão requer a avaliação da integral na energia E e na função degrau para o potencial químico. Podemos nomear eventualmente estas contribuições ao potencial termodinâmico como um termo Ω^{vac} relacionado à energia do vácuo quando integramos E no momento de zero até o valor do *cutoff* Λ e como um outro termo Ω^{med} devido à contribuição do meio denso no potencial termodinâmico.

Estas integrais são calculadas nos apêndices A e B, respectivamente. Logo, em potencial químico diferente de zero e temperatura nula temos o potencial termodinâmico escrito como

$$\begin{aligned} \Omega = & \frac{(M - m)^2}{4G_S} + \frac{N_c N_f}{8\pi^2} \left[M^4 \ln \left(\frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + M^2}}{M} \right) \right. \\ & - \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + M^2} (2\Lambda^2 + M^2) - M^4 \ln \left(\frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - M^2}}{M} \right) \\ & \left. - \frac{5}{3} \mu (\mu^2 - M^2)^{3/2} + \mu^3 \sqrt{\mu^2 - M^2} \right] . \end{aligned} \quad (2.63)$$

A equação do *gap* pode ser obtida assumindo a condição de mínimo por meio da primeira derivada do potencial termodinâmico em relação à massa

$$\frac{\partial \Omega}{\partial M} = 0 . \quad (2.64)$$

No caso onde temos tanto a temperatura quanto o potencial químico nulos devemos encontrar a seguinte expressão

$$\frac{\partial \Omega}{\partial M} = \frac{M - m}{2G_S} - 2N_c N_f \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{M}{E} = 0 , \quad (2.65)$$

de modo que, se resolvermos a integral acima verificamos a seguinte relação autoconsistente para a massa efetiva dos quarks

$$M = m + \frac{G_S N_c N_f M}{\pi^2} \left[\Lambda \sqrt{\Lambda^2 + M^2} - M^2 \ln \left(\frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + M^2}}{M} \right) \right] . \quad (2.66)$$

Por outro lado, se a temperatura é zero e o potencial químico não nulo, a equação do *gap* para a massa dos quarks deve ser determinada resolvendo-se iterativamente a seguinte expressão

$$M = m + \frac{G_S N_c N_f M}{\pi^2} \left[\Lambda \sqrt{\Lambda^2 + M^2} - M^2 \ln \left(\frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + M^2}}{M} \right) - \mu \sqrt{\mu^2 - M^2} + M^2 \ln \left(\frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - M^2}}{M} \right) \right]. \quad (2.67)$$

A densidade de partículas pode ser relacionada ao momento de Fermi, $p_F = \Theta(\mu - M)\sqrt{\mu^2 - M^2}$, como

$$\rho(\mu, M) = \frac{N_c N_f}{3\pi^2} \left[\Theta(\mu - M)\sqrt{\mu^2 - M^2} \right]^3. \quad (2.68)$$

2.6 Escolha dos Parâmetros

De agora em diante, nós podemos definir que o valor de Λ , a constante de acoplamento G_S e a massa nua dos quarks m sejam os únicos parâmetros livres nesta versão do modelo de NJL. Seus valores são escolhidos fixando os valores previstos para os observáveis fenomenológicos medidos para a massa do pión m_π , para sua constante de decaimento f_π e para o valor do condensado de quarks no vácuo, $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$. Nas linhas seguintes, forneceremos as razões pelas quais e como tais quantidades físicas estão relacionadas aos parâmetros mencionados.

Usando o vértice de NJL de 4-pontos, somos capazes de simular a troca mesônica através de uma aproximação por série efetiva de fase aleatória (*Random Phase Approximation*, RPA).

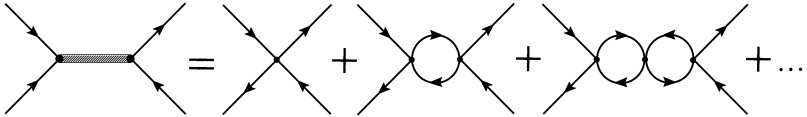


Figura 2.4: Diagramas relativos a expansão em série RPA para o propagador mesônico efetivo.

O propagador mesônico efetivo pode ser extraído [21, 29] a partir da definição para a matriz T de espalhamento quark-antiquark

$$T_M(q^2) = \frac{2G_S}{1 - 2G_S\Pi_M(q^2)}, \quad (2.69)$$

onde a função de polarização $\Pi_M(q^2)$ é dada em termos do momento transferido q por

$$\Pi_M(q^2) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\mathcal{O}_M S(p+q) \mathcal{O}_M S(p)] \quad (2.70)$$

$$\text{onde } \begin{cases} \mathcal{O}_\sigma = \mathbb{1} & \text{canal } \sigma \\ \mathcal{O}_{\pi_a} = i\gamma_5 \tau_a & \text{canal tripleto do } \vec{\pi} \end{cases}$$

Estas funções de polarização podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \Pi_\sigma(q^2) &= \frac{1}{2G_S} \left(1 - \frac{m}{M}\right) - \frac{1}{2}(q^2 - 4M^2)4N_c N_f i \\ &\quad \times \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p+q)^2 - M^2 + i\varepsilon][p^2 - M^2 + i\varepsilon]} , \\ \Pi_{\pi_a}(q^2) &= \frac{1}{2G_S} \left(1 - \frac{m}{M}\right) - \frac{1}{2}q^2 4N_c N_f i \\ &\quad \times \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p+q)^2 - M^2 + i\varepsilon][p^2 - M^2 + i\varepsilon]} . \end{aligned} \quad (2.71)$$

A troca mesônica efetiva T_M deve divergir quando substitui-se a massa do méson m_M . Seu valor pode ser determinado resolvendo [21, 29] a seguinte equação

$$1 - 2G_S \Pi_M(q_0^2) = 0 \quad \text{quando} \quad q_0^2 = m_M^2 . \quad (2.72)$$

As massas do pion m_π e do méson m_σ correspondem a solução do pólo em q_0

$$\begin{aligned} 1 - 2G_S \frac{N_c N_f}{\pi^2} \mathcal{P} \int_0^\Lambda \frac{p^2}{E} \left(1 - \frac{q_0^2}{q_0^2 - 4E^2}\right) dp &= 0 \quad \text{para } \sigma , \\ 1 - 2G_S \frac{N_c N_f}{\pi^2} \mathcal{P} \int_0^\Lambda \frac{p^2}{E} \left(1 - \frac{q_0^2 - 4M^2}{q_0^2 - 4E^2}\right) dp &= 0 \quad \text{para } \vec{\pi} . \end{aligned} \quad (2.73)$$

onde \mathcal{P} é o valor principal de Cauchy da integral imprópria. Ao considerar o processo de decaimento do pion π_b (isospin b) por meio

de uma corrente axial parcialmente conservada (*Partially-Conserved-Axial-Current*, PCAC) para um estado de vácuo $|0\rangle$, define-se [29] a seguinte relação

$$\langle 0 | \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} \psi | \pi^b(q) \rangle = i \delta^{ab} f_\pi q_\mu . \quad (2.74)$$

O diagrama de decaimento eletrofraco de um méson pi pode ser visto abaixo mostrando o acoplamento em *loop* de quark entre um pion e o vácuo.

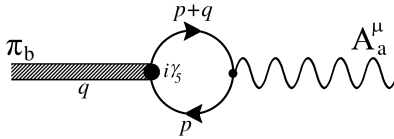


Figura 2.5: Decaimento eletrofraco via a aniquilação de um *loop* de quark para uma corrente axial A_a^μ com isospin a .

Este diagrama pode ser avaliado [29] de acordo com a seguinte expressão

$$f_\pi^2 = \frac{G_{\pi qq} M N_c N_f}{4\pi^2} \mathcal{P} \int_0^\Lambda \frac{p^2}{E(E^2 - 1/4m_\pi^2)} dp . \quad (2.75)$$

As constantes m_π , f_π e $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ podem ser associadas a massa nua dos quarks por meio da relação de Gell-Mann–Oakes–Renner [36]

$$m_\pi^2 f_\pi^2 = -2m \langle \bar{\psi}\psi \rangle . \quad (2.76)$$

De maneira a ajustar os valores fenomenológicos observados para $f_\pi = 92.4 \pm 0.2$ MeV [37], $m_\pi = 135$ MeV [38] e $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ ³ fixamos o conjunto de parâmetros livres (Λ , G_S , m) que serão usados em nossos cálculos. Na literatura [33], encontram-se alguns conjuntos de parâmetros bem conhecidos que poderão ser empregados neste trabalho. Abaixo, mostramos alguns conjuntos

³O valor esperado para o condensado de quarks no vácuo pode ser determinado por exemplo em cálculos da rede [39] como $\langle uu \rangle^{1/3} = -(231 \pm 4 \pm 8 \pm 6)$ MeV ou ter seu limite estabelecido através de regras de soma da QCD como $190 \text{ MeV} \lesssim -\langle uu \rangle^{1/3} \lesssim 260 \text{ MeV}$ [40].

Conjunto	Λ [MeV]	$G_S \Lambda^2$	m [MeV]	M_{vac} [MeV]	$\langle \bar{\psi} \psi \rangle^{1/3}$
1	664.3	2.06	5.0	300	-250.8
2	587.9	2.44	5.6	400	-240.8
3	569.3	2.81	5.5	500	-242.4
4	568.6	3.17	5.1	600	-247.5

onde M_{vac} refere-se à massa dos quarks no vácuo, ou seja, $T = 0$ e $\mu = 0$. Neste capítulo, os resultados foram obtidos pela aplicação do conjunto de parâmetros 2.

2.7 Solução Numérica da Equação do Gap

A solução autoconsistente da equação do *gap* Eq.(2.58) (ou Eq.(2.67) em $T = 0$), para um dado par de parâmetros de controle (μ, T) na parametrização adotada define o valor da massa efetiva M . Este valor corresponderá a solução de mínimo global do potencial termodinâmico $\Omega(\mu, T, M)$, Eq.(2.55), e nestas condições nos tornamos capazes de avaliar todos os observáveis termodinâmicos. Plotando o potencial termodinâmico em relação a M para um dado par arbitrário (μ, T) chegamos as funções representadas na Fig.(2.6).

Quando a temperatura T e/ou o potencial químico μ aumentam, a forma do potencial termodinâmico muda de modo que a posição do mínimo desloca-se até que o valor de m seja alcançado. Esta passagem pode ocorrer em três maneiras: através de uma transição de primeira ordem, através de uma transição de segunda ordem ou por um *crossover* suave.

Na região próxima a $\mu = 0$, conforme a temperatura se eleva, a condição de dois mínimos de vácuo modifica-se para um único mínimo diretamente. No painel superior da Fig.(2.7) são mostradas as respectivas mudanças no potencial termodinâmico produzidas pela elevação da temperatura.

Em vez disso, próximo a região de $T = 0$ no caso quiral, quando o potencial químico se eleva, uma transição termodinâmica diferente ocorre. Observa-se o aparecimento de um novo mínimo local, o qual torna-se mais profundo a medida que o potencial químico aumenta mais. Em um dado ponto, os três mínimos exibem a mesma profundidade e obtemos dois estados de vácuo equivalentes para dois valores físicos de massa $M \geq 0$. Esta característica estabelece a coexistência de duas fases de densidades distintas na mesma pressão (visto que as profundidades dos mínimos são as mesmas vide equação

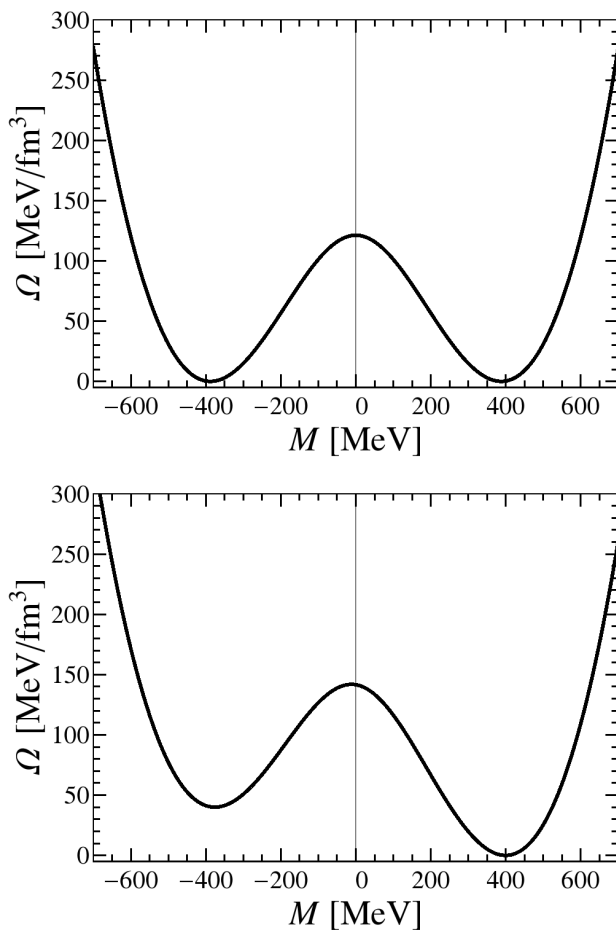


Figura 2.6: Determinação do potencial termodinâmico de campo médio para ($\mu = 0, T = 0$) no caso quiral $m = 0$ (Painel superior) e para massa de corrente finita $m = 5.6$ MeV (Painel inferior). O valor mínimo da função representa a massa de vácuo $M_{vac} \sim 400$ MeV assumida pelo condensado. Aqui, nós normalizamos o potencial termodinâmico subtraindo a constante $\Omega(0, 0, M_{vac})$, tal que seu valor seja nulo em ($\mu = 0, T = 0$).

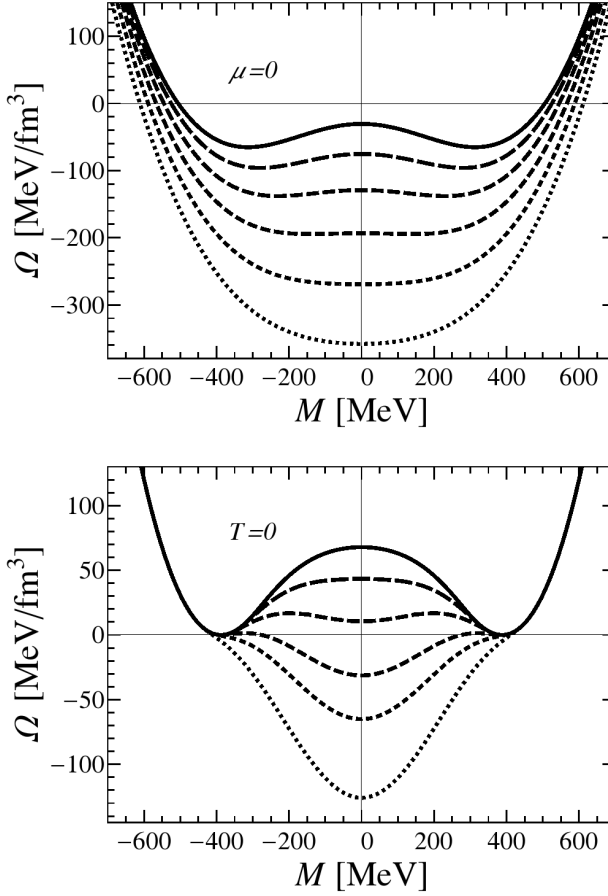


Figura 2.7: (Painel superior) Aumentando a temperatura de 150 – 200 MeV observamos uma transição de fase de segunda ordem partindo de uma massa efetiva finita (linha cheia) em direção a um estado mínimo não massivo (curva pontilhada) para $\mu = 0$; (Painel inferior) Conforme o potencial químico varia de 300 – 440 MeV ($T = 0$), uma transição de primeira ordem ocorre, caracterizada principalmente pelo aparecimento de um novo mínimo global.

Eq.(2.33)). No painel inferior da Fig.(2.7) são mostrados os perfis de potencial termodinâmico que exemplificam a coexistência de fase na transição de primeira ordem. A transição de segunda ordem ocorre quando o mínimo original em $M \neq 0$ se desloca até o valor m de maneira contínua como pode ser visto na Fig.(2.8). A temperatura crítica T_c de transição neste caso pode ser caracterizada pela situação onde a curvatura no fundo do potencial é zero

$$\left. \frac{\partial^2 \Omega}{\partial M^2} \right|_{T=T_c} = 0 . \quad (2.77)$$

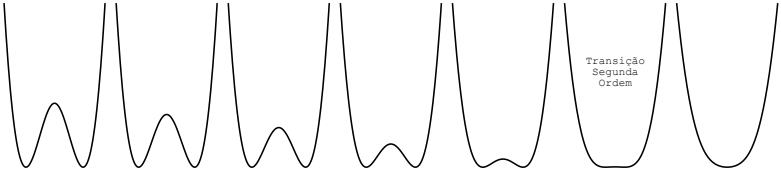


Figura 2.8: Evolução da forma do potencial termodinâmico no caso quiral ($m = 0$) conforme a temperatura sobe da esquerda para a direita. O dois mínimos devem desaparecer exatamente quando a curvatura é nula no fundo do potencial.

Diferentemente, a transição de primeira ordem fica caracterizada pelo aparecimento de outro mínimo local o qual evolui para um mínimo global (veja a Fig.(2.7)). Se a transição de primeira ordem ocorre, a forma do potencial termodinâmico muda como mostrado na Fig.(2.9). A linha de transição para um dado potencial químico de coexistência μ_c fica caracterizada pela condição de igual profundidade (i.e. mesma pressão) para os três mínimos coexistentes.

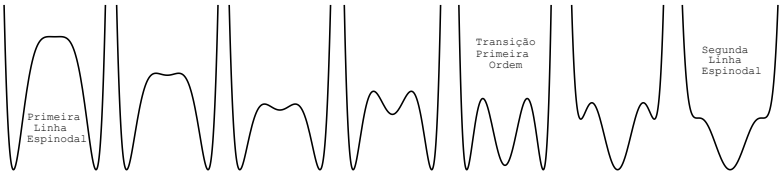


Figura 2.9: Mudanças produzidas na forma do potencial efetivo no caso quiral ($m = 0$) a medida que o potencial químico aumenta da esquerda para a direita. Os mínimos de igual profundidade definem a linha de transição de primeira ordem e as linhas espinodais são determinadas quando a derivada segunda é nula.

Além disso, no ponto de inflexão onde o mínimo central aparece, quando a derivada segunda $\partial^2 \Omega / \partial M^2 = 0$ é nula nesta posição,

definimos a primeira linha espinodal. Se a derivada segunda é nula na posição do primeiro mínimo original, então caracterizamos o segundo limite espinodal. As linhas espinodais são os contornos separando a região monofásica estável da região de instabilidade de fases múltiplas. Flutuações na energia podem levar a estados metaestáveis quando as partículas do sistema saltam do estado de mínimo global para o mínimo local menos estável. Esta decomposição espinodal difere da nucleação porque ocorre uniformemente em todo o sistema, enquanto este último corresponde a um fenômeno localizado. Podemos enunciar assim a seguinte sequência de modificações no potencial termodinâmico: 1^o Inicialmente ocorre um ponto de inflexão central o qual caracteriza a primeira linha espinodal; 2^o Em seguida, na mesma posição, forma-se um mínimo local metaestável que evolui para um estado de mesma pressão que o mínimo global; 3^o A linha transição de primeira ordem fica caracterizada por dois mínimos com a mesma profundidade; 4^o O mínimo global inicial fica menos profundo até desaparecer em um ponto de inflexão que estabelece a segunda linha espinodal.

Se a derivada primeira $\partial\Omega/\partial M$ exibe uma descontinuidade explícita, dois mínimos globais degenerados podem ocorrer no mesmo valor de (μ, T) , definindo a coexistência de fases na transição de primeira ordem. Caso contrário, se a descontinuidade aparece somente na derivada segunda, devemos considerar uma transição de fase de segunda ordem.

O comportamento da massa efetiva M sob valores crescentes de temperatura e potencial químico é mostrado na Fig.(2.10). Fora do limite quiral, a massa de corrente finita do quark impede a restauração total da simetria quiral e não podemos observar uma transição de fase verdadeira próximo a $\mu = 0$. A passagem do valor de massa efetiva do vácuo (aqui $M_{vac} \sim 400$ MeV) para a massa de corrente do quark deve ocorrer neste caso através de um *crossover*.

O gráfico da esquerda corresponde a transição de fase de segunda ordem no limite quiral ($m = 0$) e a uma transição do tipo *crossover* no limite de massa de corrente finita ($m = 5.6$ MeV). O gráfico da direita exemplifica a transição de primeira ordem em ambos os casos. Analogamente, podemos considerar a similaridade existente entre a transição de fase em um sistema ferromagnético e a restauração da simetria quiral por meio de uma transição de 2^a ordem. Em um sistema magneticamente ordenado, quando a temperatura aumenta a magnetização total reduz-se a zero acima da temperatura crítica de Curie. Além desta temperatura os dipolos magnéticos ficam desordenados completamente e o sistema parece o mesmo em todas as

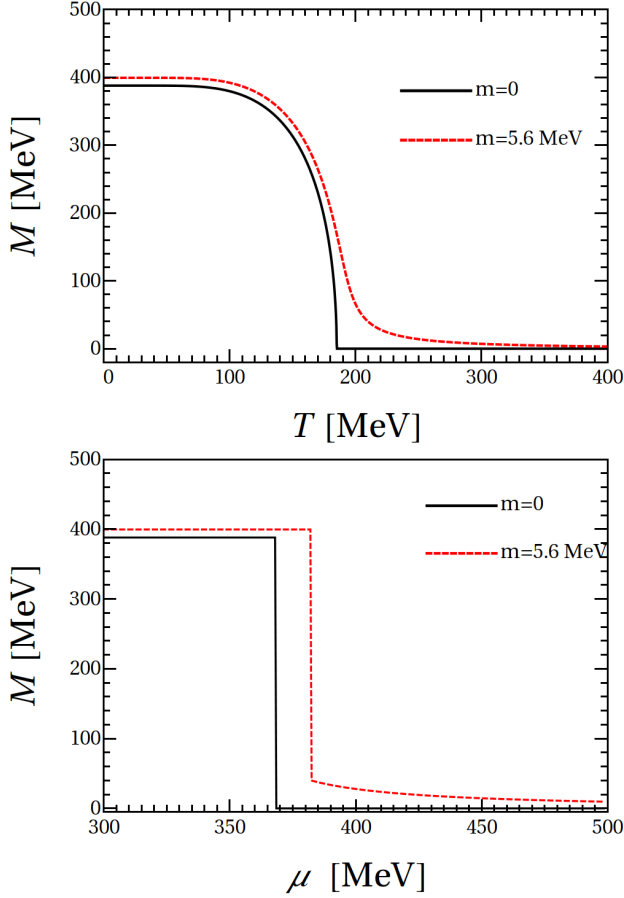


Figura 2.10: Dependência da massa efetiva M na temperatura em $\mu = 0$ (Painel superior) e no potencial químico em $T = 0$ (Painel inferior). No gráfico da esquerda observamos uma transição de fase de segunda ordem no caso quiral ($m = 0$) e um *crossover* com $m = 5.6$ MeV. No gráfico da direita, ambos os casos estão relacionados a transição de primeira ordem.

direções significando que a simetria é totalmente restaurada. Porém, se um campo magnético fraco de fundo está presente, mesmo acima da temperatura crítica o sistema ainda deve exibir uma magnetização não nula residual. Neste caso, a simetria rotacional é apenas parcialmente restaurada.

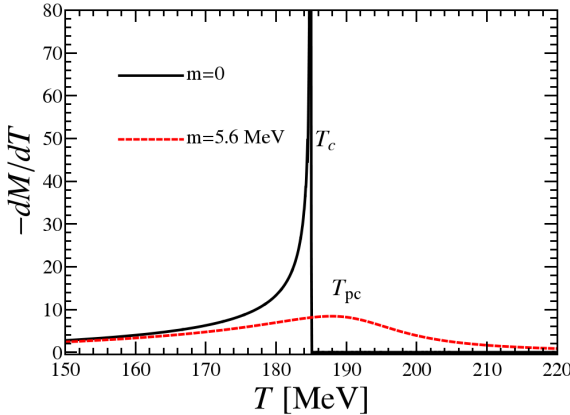


Figura 2.11: Dependência na temperatura para a primeira derivada do potencial termodinâmico em relação ao parâmetro de ordem M em $\mu = 0$ para ambos os casos.

Este comportamento é totalmente comparável ao mecanismo de quebra dinâmica de simetria observado na Fig.(2.10). Se os quarks possuem uma massa de corrente não nula, a simetria quiral é apenas parcialmente restaurada e neste caso não podemos associar tal passagem a uma verdadeira transição de fase de segunda ordem. Na Fig.(2.11) podemos ver as derivadas da massa efetiva em função da temperatura em $\mu = 0$ calculadas para o primeiro gráfico da Fig.(2.10). Somente atribuímos uma temperatura crítica T_c a variação abrupta que aparece no caso quiral⁴. Se os quarks tem massa nua finita, designamos então uma temperatura pseudo crítica, T_{pc} , associada ao *crossover*. Construindo gráficos sucessivos para o potencial termodinâmico ao longo dos eixos da temperatura e do potencial químico, verificamos que um contorno de fase relativo à restauração da simetria quiral torna-se evidente, conforme mostramos na Fig.(2.12).

Na Fig.(2.13) mostramos o gráfico da massa efetiva em relação ao potencial químico e a temperatura. Olhando para estas superfícies é

⁴Na realidade, a descontinuidade está presente somente na derivada segunda.

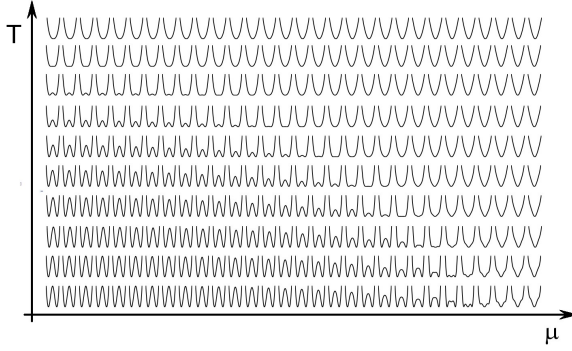


Figura 2.12: Modificação na forma do potencial termodinâmico no caso quiral ao longo dos eixos da temperatura e do potencial químico. Note o contorno do limite de fases definido pela restauração da simetria quiral, e as regiões respectivas as transições de primeira e segunda ordens.

possível notar o contorno de fase onde a simetria quiral é restaurada ($m = 0$) ou parcialmente restaurada ($m \neq 0$) para valores elevados o suficiente de μ e T . A simetria quiral é espontaneamente quebrada no plano superior e torna-se restaurada conforme os valores de temperatura e potencial químico aumentam. A massa efetiva dos quarks decresce mais suavemente no caso de massa finita do que no caso quiral, refletindo assim a diferença existente entre o *crossover* e a transição de segunda ordem. A queda mais íngreme nos gráficos indica a região onde ocorre a transição de primeira ordem.

Em colisões de íons ultra-relativísticos, os estados hadrônicos originais são aquecidos e comprimidos até que a simetria quiral seja parcialmente restaurada ⁵. Logo após o impacto, a bola de fogo que sobra resfria e começa a expandir. Quando a temperatura e densidade diminuem suficientemente, a simetria quiral torna-se espontaneamente quebrada novamente e novas espécies hadrônicas começam a emergir. A ordem desta transição quiral determina a evolução dinâmica do estado de plasma (plano inferior $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \simeq 0$) para o estado hadrônico (plano superior $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$) e deve influenciar o nascimento e propriedades das partículas emitidas. Contando e medindo os restos deixados pela colisão

⁵Não devemos tomar a rigor tal ilustração pictórica da compressão e aquecimento dos nucleons nas colisões, isto apenas nos auxilia a compreender o fenômeno de modo simplificado. Em um contexto mais realista, baseado nos experimentos, os nucleons são praticamente transparentes entre si e as interações podem ser entendidas de acordo com o conteúdo partônico de cada nucleon.

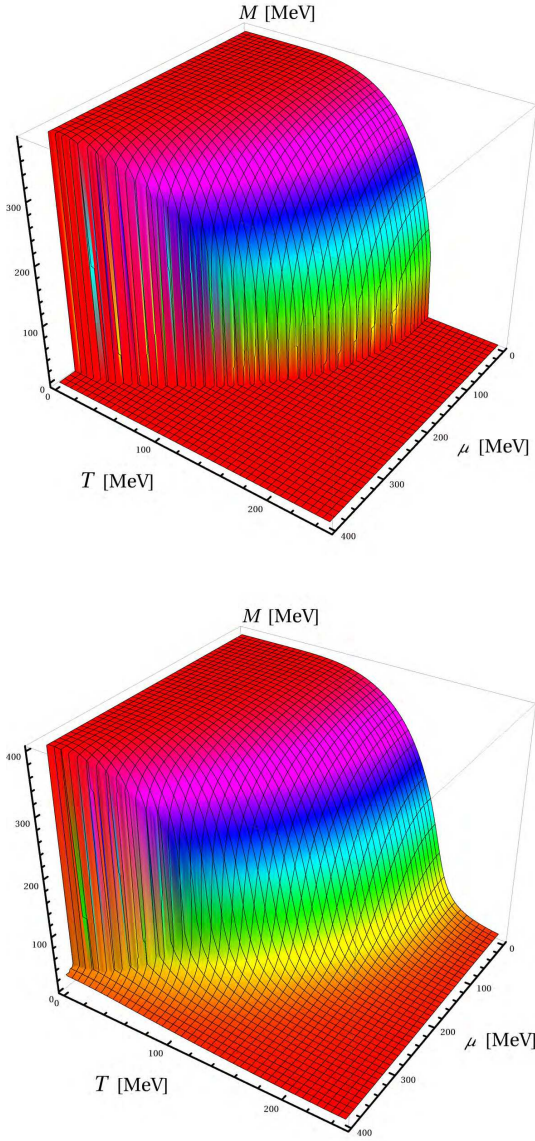


Figura 2.13: Massa efetiva dos quarks no modelo SU(2) de NJL como função de μ e T no limite quiral (Painel superior) e massa de corrente finita (Painel inferior).

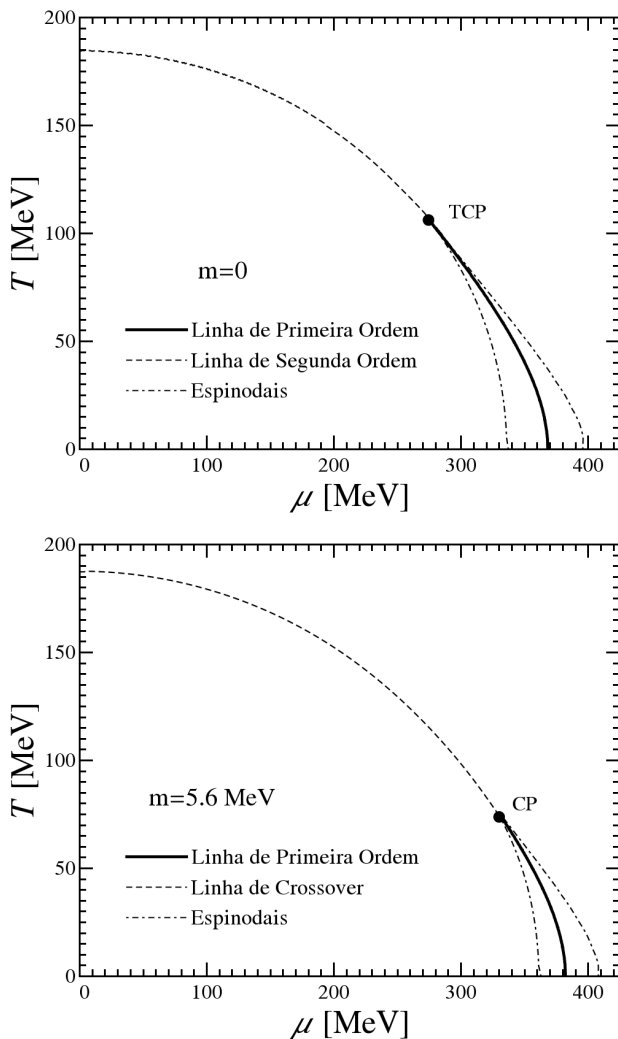


Figura 2.14: Contornos de transição de fase mostrando as regiões correspondentes onde a primeira ordem ocorre e também a região relativa a transição em segunda ordem ou *crossover*. O domínio de primeira ordem encontra a região de segunda ordem no ponto tricrítico (TCP). Enquanto no caso de transição *crossover* esta posição é o ponto crítico (CP).

somos capazes de inferir a respeito do próprio diagrama de fases da QCD e estender estes conceitos a outros sistemas importantes presentes na natureza.

Fazendo o mapeamento das posições (μ, T) onde os mínimos do potencial termodinâmico determinam a restauração da simetria quiral, nos permite determinar o contorno de fase rotulando tais pontos com o respectivo tipo de transição. Na Fig.(2.14) são mostrados os diagramas de fases para o modelo NJL em dois sabores obtidos com o conjunto de parâmetros mostrado.

A região de transição de primeira ordem deve encontrar a segunda ordem no chamado ponto tricrítico TCP [41, 13, 42] no limite quiral. No ponto tricrítico, três fases coexistentes tornam-se idênticas simultaneamente.

Entretanto, com uma pequena massa de corrente dos quarks, este ponto é considerado apenas um ponto crítico CP porque a transição *crossover* não pode ser considerada como uma verdadeira transição de fase. Exatamente neste ponto crítico CP a transição é de segunda ordem. Comparando a posição do ponto crítico e do ponto tricrítico, notamos que o primeiro é deslocado para valores mais elevados de potencial químico em comparação com o último, como previsto a partir de argumentos de universalidade [13]. O comportamento de um sistema dinâmico deve ser independente dos detalhes microscópicos de interação quando nos aproximamos dos parâmetros críticos que determinam uma transição de fase. Desse modo, sistemas microscopicamente distintos devem exibir universalmente as mesmas propriedades próximo a uma transição por possuírem os mesmos expoentes críticos. Quando nos aproximamos do limite quiral, os expoentes críticos que definem uma expansão polinomial do potencial termodinâmico na teoria de Ginzburg-Landau [43] nos mostram como a massa dos quarks pode afetar a localização do CP.

2.8 Observáveis Termodinâmicos

Usando as relações termodinâmicas mostradas na Eq.(6.2), a pressão, P , a densidade de entropia, s , e a densidade de energia, ε , podem ser obtidas a partir do potencial termodinâmico. Depois que o mínimo do potencial é avaliado resolvendo a equação do *gap*, a pressão é simplesmente calculada como o negativo do valor do potencial termodinâmico nesta posição de massa. Tomando a derivada da pressão na variável de temperatura, mantendo μ constante, nos permite extrair a densidade de entropia. Adicionalmente, avaliando a integral Eq.(2.61)

numericamente e aplicando a expressão Eq.(6.2), somos capazes de determinar a densidade de energia.

Quando a temperatura aumenta suficientemente, estas quantidades termodinâmicas mencionadas devem apresentar assintoticamente as mesmas características atribuídas para um gás relativístico de partículas sem massa não interagentes no limite de Stefan-Boltzmann. Em potencial químico zero, a pressão de Stefan-Boltzmann de um gás não interagente composto por quarks e antiquarks sem massa é dada [44] por

$$P(T) = 2 \times 2 \times N_c \times N_f \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p}{e^{p/T} + 1} = 12N_f \left(\frac{7}{8}\right) \frac{\pi^2}{30} T^4, \quad (2.78)$$

onde consideramos as partículas livres como férmions+antiférmions por meio do fator 7/8 com duas orientações de *spin* e $N_c = 3$ cores. A consideração de antipartículas corresponde a outro fator 2. Para dois sabores de quarks, $N_f = 2$ e pode-se calcular os respectivos limites de pressão, densidade de entropia e densidade de energia de Stefan-Boltzmann (SB) como ⁶

$$\begin{aligned} \frac{P_{SB}}{T^4} &\approx 2.3 \\ \frac{s_{SB}}{T^3} &= \frac{4P_{SB}}{T^4} \approx 9.2 \\ \frac{\varepsilon_{SB}}{T^4} &= \frac{3P_{SB}}{T^4} \approx 6.9 \end{aligned} \quad (2.79)$$

Os resultados obtidos pelo modelo de NJL para estas quantidades são mostrados na Fig.(2.15), tanto para o limite quiral como para o limite de massa finita para os quarks.

A partir destes resultados é possível concluir que próximo à temperatura crítica, os valores das quantidades termodinâmicas da matéria de quarks sofrem uma mudança substancial, indicando a transição de fase prevista neste modelo. Na região de alta temperatura os valores destes observáveis devem aproximar-se do limite de SB esperado para o gás ideal como podemos observar. Convém salientar que em cálculos da rede observa-se um desacordo de aproximadamente 10 – 15% entre as referidas variáveis termodinâmicas e o limite de gás

⁶Excluindo-se os 16 graus de liberdade de glúons.

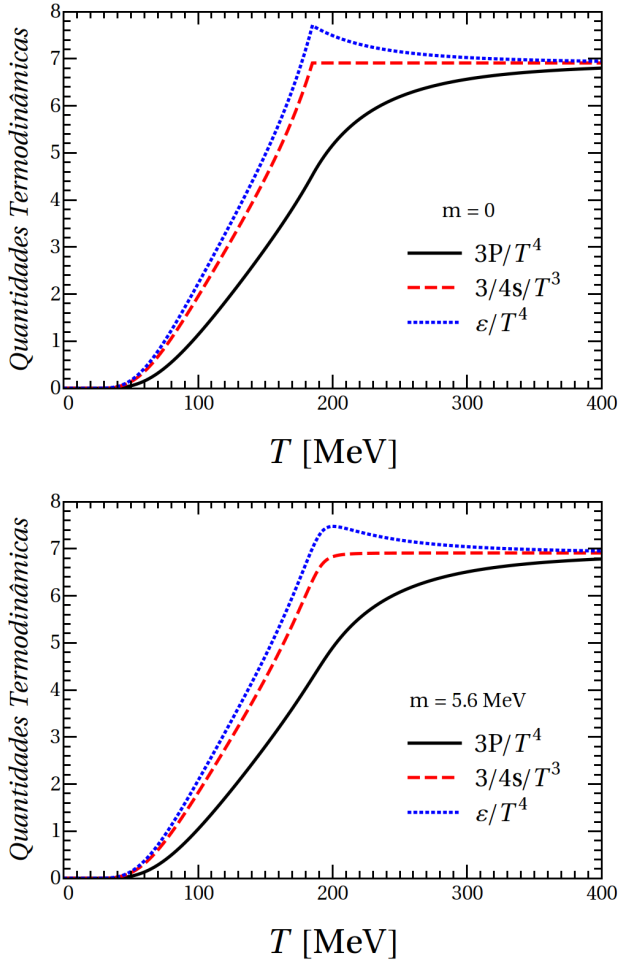


Figura 2.15: Principais quantidades termodinâmicas (pressão P , densidade de entropia s e densidade de energia ε) normalizadas por potências de T de modo a comparar seu comportamento conforme a temperatura se eleva. O gráfico superior representa o caso quiral e o inferior o caso de massa de corrente finita 5.6 MeV.

livre. Mesmo neste limite de temperatura a matéria ainda está sujeita aos efeitos provocados pela interação forte da QCD. Tem sido proposto [45] que uma massa térmica efetiva para os quarks e glúons poderia originar os desvios observados na rede.

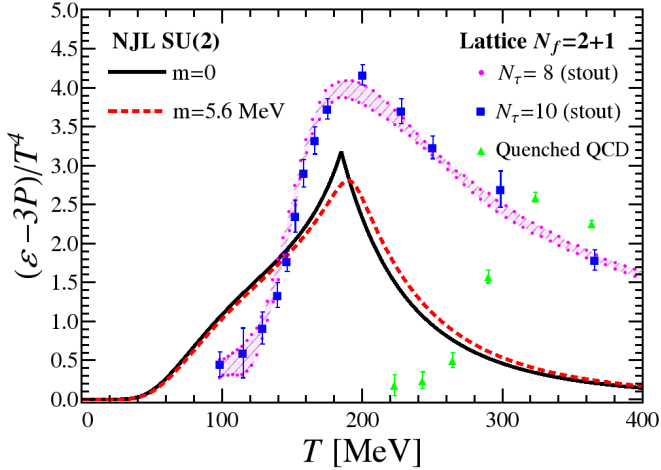


Figura 2.16: Resultados no modelo SU(2) de NJL obtidos para o observável correspondente a medida de interação $\Delta = \varepsilon - 3p/T^4$ no caso quiral e também para a massa de quarks finita. Apresentamos também os resultados de Wuppertal-Budapeste determinados na rede (*Lattice*) em $N_f = 2 + 1$ sabores para comparação, de acordo com a referência [46]. Além disso, mostramos os resultados relativos a aproximação *quenched* para a QCD na rede extraídos de [47]

Nos cálculos na rede, o observável termodinâmico básico corresponde ao traço do tensor momento-energia $\Delta = (\varepsilon - 3P)/T^4$ conhecido como medida de interação ou anomalia do traço. Esta quantidade funciona como uma medida para o desvio em relação ao comportamento de gás ideal, porque para este caso, a densidade de energia é relacionada a pressão como $\varepsilon_{SB} = 3P_{SB}$. Tal desvio do limite de Stefan-Boltzmann é maior próximo a região de transição uma vez que o número de graus de liberdade aumenta conforme a temperatura sobe. O formato de pico para o desvio tende logarithmicamente a valores próximos de zero no limite de altas temperaturas [48] como

$$\Delta \sim \frac{1}{(\log T)^3}. \quad (2.80)$$

Na Fig.(2.16), mostramos os resultados numéricos no modelo de

NJL com dois sabores para a medida de interação tanto no limite quiral ($m = 0$) quanto no limite físico ($m = 5.6$ MeV). Na mesma figura, ilustramos os resultados para a anomalia do traço Δ obtidos na rede pelos pesquisadores de Wuppertal-Budapeste [46]. Comparativamente à rede, podemos ver que apesar dos valores numéricos dos dois resultados apresentarem uma diferença considerável, o comportamento é semelhante próximo à temperatura de transição. Além disso, os resultados do modelo de NJL SU(2) e na rede apresentam dependência funcional semelhante em altas temperaturas. No entanto, a concordância é menor ao associarmos nosso resultado ao obtido [47] pela aplicação da aproximação *quenched*⁷ para a QCD na rede. É provável que a diferença entre os resultados mostrados seja devida à ausência da contribuição do confinamento no modelo de NJL. A obtenção da densidade bariônica ρ_B torna-se outra importante questão, porque esta quantidade pode ser medida diretamente a partir dos experimentos em vez do potencial químico.

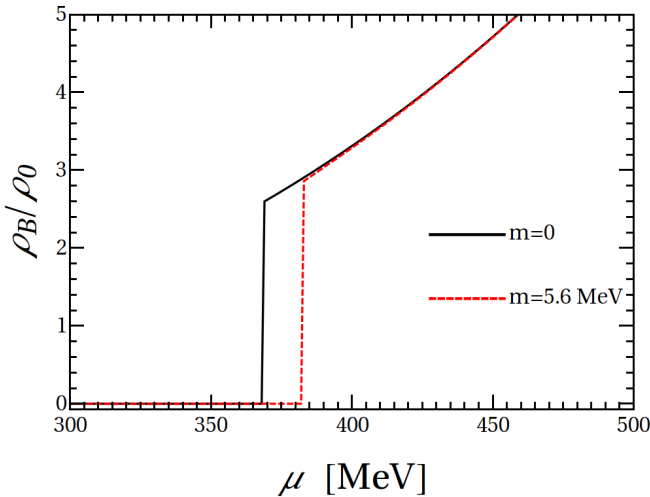


Figura 2.17: Respectivas densidades bariônicas relativas em função do potencial químico.

Uma vez que um bárion é formado por três quarks, inserimos um fator 3 ao calcular ρ_B a partir das expressões Eq.(2.61) e Eq.(2.68) para as densidades de número de quarks como $\rho_B = \rho/3$. Aqui

⁷Tal aproximação estabelece um caráter estático para o campo dos quarks nos cálculos efetuados na rede de modo a minimizar o trabalho computacional.

nós representamos os resultados como a densidade bariônica relativa a densidade de saturação da matéria nuclear normal de $\rho_0 = 0.17 \text{ fm}^{-3}$. Como ilustrado na Fig.(2.17), a densidade numérica relativa a temperatura zero salta repentinamente na região de transição entre as duas fases. Analizando a Eq.(2.68) podemos compreender o que ocorre. Enquanto a diferença $\mu - M$ permanecer um número negativo, a função degrau retornará a densidade nula. No potencial químico crítico μ_c a simetria quiral é (parcialmente) restaurada e a massa efetiva reduz-se a (massa de corrente) zero em uma transição de primeira ordem. Deste modo, a função degrau exibe uma nítida descontinuidade na densidade numérica de quarks porque $\mu > M$. Após o salto, conforme mais partículas são incluídas no sistema, a densidade de quarks cresce na taxa relativa ao custo energético μ . Se nós construirmos o mesmo gráfico na região de segunda ordem (ou *crossover*), um salto contínuo similar pode ser observado.

Previsões de modelos estelares são baseadas principalmente nos aspectos físicos de uma equação de estado (EoS) a qual determina o tipo de matéria presente no interior dos núcleos compactos. A relação entre a pressão e a densidade de energia está intimamente relacionada a estrutura e estabilidade de uma estrela densa. Nos últimos tempos, questiona-se sobre possibilidade de existência de estrelas sustentadas pela matéria de quarks [16, 49, 50]. Deste modo, o modelo de NJL pode ser considerado como uma boa alternativa na investigação das possíveis propriedades deste tipo de objeto estelar. De fato, do ponto de vista de interações microscópicas efetivas, pode-se investigar as propriedades macroscópicas de objetos tão grandes quanto uma estrela inteira. Na Fig.(2.18) mostramos o gráfico referente a equação de estado avaliada no modelo de NJL com dois sabores referente a transição entre a matéria hadrônica e a matéria densa de quarks.

Quando a temperatura aumenta além da região de transição notamos um comportamento que aproxima-se àquele apresentado pela equação de estado de um gás ideal relativístico $\varepsilon = 3P$. A região de transição propriamente dita é bem definida no limite quiral por um desvio repentino, onde o aumento no número de graus de liberdade altera a relação existente entre a pressão e a densidade de energia. Ao considerar uma pequena massa de corrente para os quarks vemos que esta transição fica mais suave. Este comportamento termodinâmico definido pela EoS pode ser inserido na equação de Tolman-Oppenheimer-Volkov (TOV), cuja solução resulta nas curvas de massa-raio estelares. Entretanto, no estudo do modelo SU(2)NJL este cálculo é parcial visto que não estão inclusos aqui os efeitos

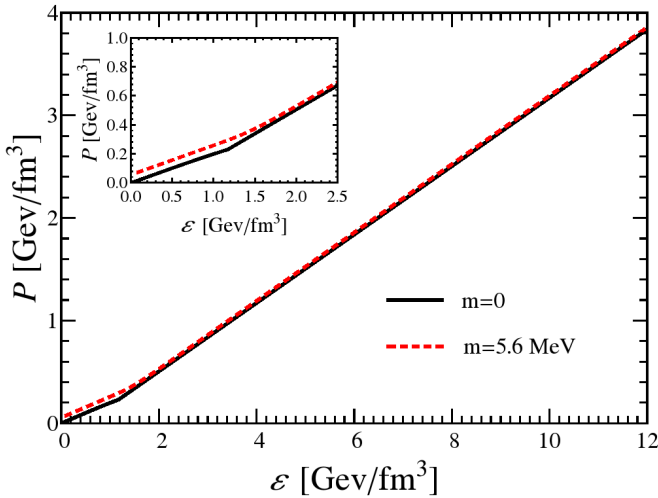


Figura 2.18: Gráfico da equação de estado no caso quiral e para a massa de corrente finita, ambos em $\mu = 0$.

decisivos relativos a estranheza.

Outro importante observável que pode ser extraído destes cálculos de NJL é o parâmetro P/ε , o qual serve como uma aproximação para a velocidade do som no meio quente e denso da matéria de quarks. A velocidade do som ao quadrado é dada pela seguinte expressão

$$\frac{c_s^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial \rho_{massa}} = \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right) / \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right). \quad (2.81)$$

Por definição, esta velocidade do som não pode exceder a velocidade da luz $c_s^2 \leq 1$ para garantir que a causalidade não seja violada. Usualmente, a velocidade do som dada pela Eq.(2.81) é aproximada pela razão P/ε no limite de altas temperaturas.

Como as leis da hidrodinâmica relativística clássica podem fornecer previsões relativas a esta quantidade, nos tornamos capazes de estabelecer um paralelo entre estes formalismos por meio do seu cálculo. Na região central das colisões de íons pesados, a matéria comprimida começa a se expandir imediatamente após ao choque inicial. O escoamento e resfriamento da matéria em expansão ocorre como uma frente de onda de rarefação que possui a velocidade do som no fluido. A evolução temporal da temperatura é dada pela hidrodinâmica

relativística no modelo de Bjorken [51, 31] como

$$T(\tau) = T_0 \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^{c_s^2}, \quad (2.82)$$

onde a temperatura inicial $T_0 = T(\tau_0)$ decresce rapidamente para zero no tempo próprio τ a uma taxa exponencial $c_s^2 = P/\varepsilon$. Na Fig.(2.19) apresentamos os resultados obtidos para a velocidade do som aproximada no modelo de NJL com dois sabores

Analisando como a aproximação para a velocidade do som depende da temperatura e do potencial químico, verificamos que a região onde sua magnitude muda repentinamente fica próxima ao contorno de fase. No limite quiral observamos um cúspide para baixo próximo a temperatura crítica. Enquanto no caso da transição *crossover* vemos apenas um canto suave.

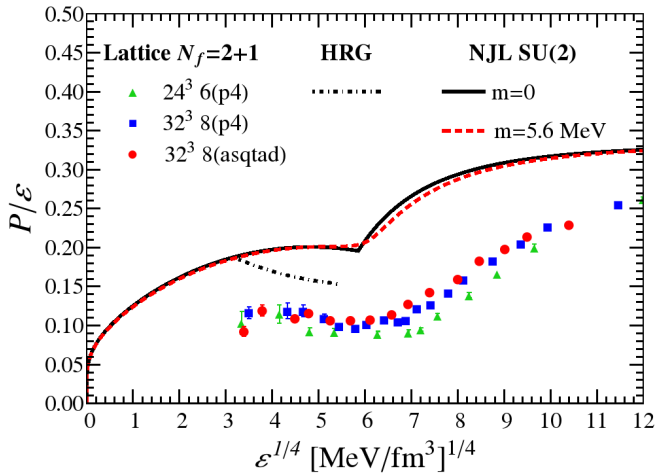


Figura 2.19: Velocidade do som aproximada P/ε obtida no modelo a dois sabores de NJL, para $\mu = 0$ e $0 < T < 400$ MeV em unidades de velocidade c^2 . Comparamos no gráfico este resultado do modelo NJL(2) com os valores determinados para a mesma grandeza na rede (*Lattice*) sob duas extensões temporais $N_\tau = 6, 8$ e duas ações fermiônicas (p4 e asqtad) [52]. Também mostramos o resultado usando o modelo hadrônico (HRG) extraído da mesma referência.

Comparando este gráfico com o mostrado na Fig.(2.10) para $\mu = 0$ podemos perceber que a mudança brusca na massa efetiva é responsável por este comportamento no caso quiral. Na mesma Fig.(2.19), comparamos o resultado numérico obtido por meio do

modelo SU(2) de NJL, com os valores para a grandeza P/ε determinada na rede com $N_f = 2 + 1$ sabores, sob diferentes extensões temporais e ações fermiônicas. Além disso, mostramos um resultado determinado pelo modelo hadrônico HRG (*Hadron Resonance Gas*) mostrado na mesma referência citada. Podemos perceber que em ambos os casos os valores determinados pelo modelo NJL SU(2) superam numericamente as outras previsões.

Na Fig.(2.20), também mostramos o gráfico de contornos da velocidade do som. As linhas mostradas indicam as posições no plano $T - \mu$ que partilham os mesmos valores para a velocidade do som $P\varepsilon$. Visivelmente notamos o aparecimento de uma estrutura de *plateau* próxima a região onde espera-se um ponto crítico. Tal estrutura pode tornar-se importante do ponto de vista experimental. As energias de colisão usadas nos experimentos (p.ex. RHIC-BES) que buscam mostrar a existência e localização do ponto crítico no diagrama de fases da QCD encontram-se justamente nessa região. Convém notar que até o momento não há evidência experimental que mostre a existência desse ponto crítico. No entanto, sua existência poderia confirmar nossos pressupostos teóricos acerca do diagrama. Por outro lado, sua inexistência também suscitaria novos problemas.

Outra fator relevante nesse contexto consiste no cálculo da entropia. Na Fig.(2.21) mostramos as linhas de contorno isentrópicas encontradas em nosso cálculo de NJL com a massa de corrente finita. Torna-se uma importante questão determinar a razão entre a densidade de entropia e a densidade bariônica s/ρ_B em nossos cálculos. Nas colisões de íons pesados, o impacto dos núcleos participantes comprime a matéria hadrônica até que um estado muito denso seja alcançado. A medida que a bola de fogo quente e densa começa a expandir, sua entropia permanece aproximadamente constante. Esta expansão adiabática obriga as partículas emitidas a seguir trajetórias isentrópicas ao longo do plano $T - \mu$. A evolução termodinâmica e hidrodinâmica de uma colisão de núcleos relativísticos deve desenvolver trajetórias de *freeze-out* que estão intimamente relacionadas às linhas isentrópicas.

Nossa avaliação destas trajetórias empregando o modelo de NJL demonstra uma mudança na direção das linhas de contorno isentrópicas sobre a linha de transição. Vemos que região de primeira ordem produz um encurvamento maior das linhas adiabáticas do que a região de *crossover*. Além disso, em $T = 0$ todas as trajetórias convergem para a posição de potencial químico próximo a $\mu = M_{vac}$. Comparando estes resultados com cálculos anteriores da rede [54] vemos uma certa concordância na forma das linhas, mas seus valores estão deslocados

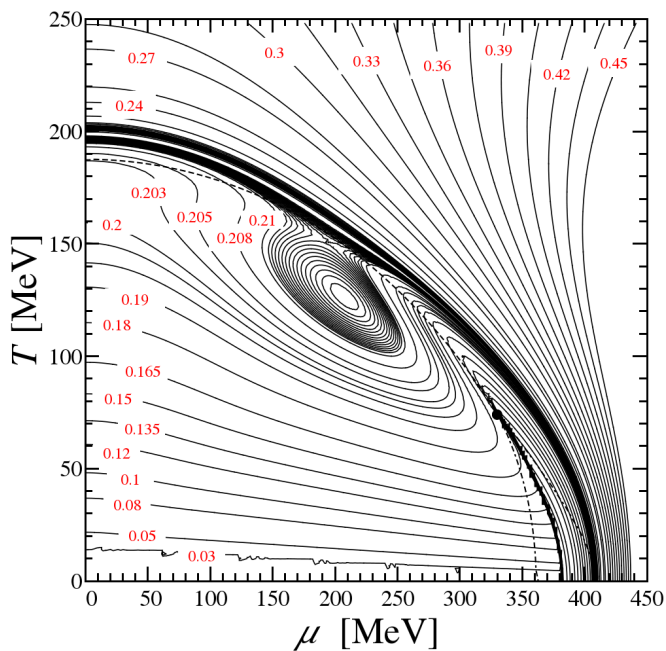


Figura 2.20: Mapa de contorno para a velocidade do som aproximada em função de μ e T para $m = 5.6$ MeV. Repare que a linha escura a qual marca a região onde a velocidade do som aumenta repentinamente está bem próxima ao esperado contorno de transição de fase.

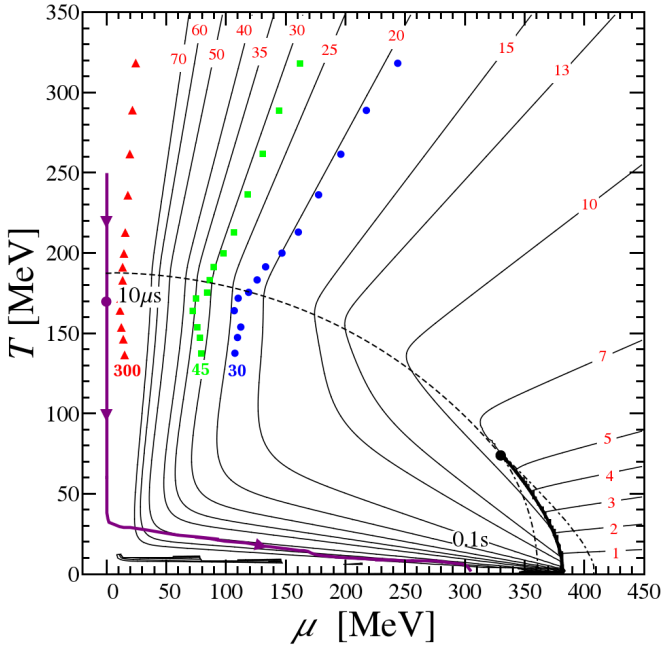


Figura 2.21: Linhas isentrópicas s/A obtidas em nosso cálculo usando o modelo de NJL. Os pontos coloridos foram obtidos a partir de simulações na rede (círculos $s/A = 30$, quadrados $s/A = 45$ e triângulos $s/A = 300$). A trajetória contínua em púrpura indicada foi avaliada por Braun-Munzinger e Wambach [53] assumindo que o Universo primordial expandiu isentropicamente e usando o valor conhecido para razão de bárions para fótons.

entre si. Nas curvas isentrópicas da rede também observamos que a transição acontece em uma temperatura menor que as temperaturas pseudo críticas de *crossover* do modelo de NJL. Aqui o efeito de focalização [55] das linhas isentrópicas ao redor do ponto crítico não se apresenta como já apontado por Scavenius et al. [12].

Outra característica interessante sobre este gráfico pode ser vista pela comparação com o cálculo realizado por Braun-Munzinger e Wambach [53] para uma possível trajetória isentrópica descrita pelo Universo primordial.

2.9 Considerações Finais

Neste capítulo apresentamos os principais aspectos formais referentes ao modelo de Nambu–Jona-Lasinio com dois sabores de quark. Também reproduzimos alguns de seus principais resultados relativos a obtenção do diagrama de fases da QCD. Esta teoria de campo efetiva somente simula os aspectos da simetria quiral da cromodinâmica quântica. De modo a incluir a propriedade do confinamento, precisaríamos considerar também os graus de liberdade dos glúons para obter uma descrição efetiva completa da QCD. Isso pode ser realizado usando o modelo PNJL que apresenta um potencial efetivo para descrever de modo efetivo o confinamento. No próximo capítulo, estudaremos os efeitos referentes a introdução de um termo de acoplamento vetorial na lagrangiana $SU(2)$ de NJL.

Capítulo 3

Contribuições Vetoriais no Modelo NJL SU(2)

No capítulo anterior, vimos como o diagrama de fases calculado a partir da versão padrão do modelo NJL depende da temperatura e do potencial químico. Adicionalmente, verificamos a dependência das características do diagrama de fases em relação aos valores assumidos pelas massas dos quarks.

Outra questão a considerar é que as simetrias implícitas na lagrangiana da QCD devem ser realizadas por ambos os graus de liberdade de glúons e de quarks. Sabemos que as principais simetrias que podem ser empregadas para sondar as transições de fase da matéria hadrônica são a simetria quiral e a simetria central $Z(3)$ de confinamento [56]. Enquanto a primeira está relacionada aos graus de liberdade dos quarks a última é devida principalmente aos campos de glúons. Como mencionado antes, os parâmetros de ordem que podem ser usados para definir os contornos das transições de fase são respectivamente, o valor esperado do condensado quark-antiquark $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ (simetria quiral) e o *loop* de Polyakov $\langle L(\vec{x}) \rangle$ (simetria central).

Deixando que a massa dos quarks varie a partir de seus valores físicos nos permite distinguir estes diferentes regimes de simetria da QCD. No setor de quarks leves ($m_u = m_d, m_s$) pode-se construir

o chamado diagrama de Columbia de modo a esboçar as principais características que podem ser extraídas de simulações numéricas e modelos efetivos.

Na Fig.(3.1) mostramos o diagrama esquemático de Columbia o qual resume o quadro atual relativo ao diagrama de fases da QCD coerente com diversos resultados obtidos pela aplicação desta teoria de calibre na rede. O plano do gráfico mostrado encontra-se no patamar $\mu = 0$. Se os quarks são altamente massivos, somente o setor gluônico de calibre da QCD deve ser considerado e o confinamento torna-se o aspecto mais importante. Por outro lado, no limite de massas pequenas para os quarks a simetria quiral é predominante. Ambos os cantos opostos do diagrama de Columbia são presumivelmente dominados por transições de primeira ordem de acordo com cálculos da rede.

No intervalo de massas intermediárias dos quarks, define-se uma região de *crossover*. Esta região central de *crossover* fica separada das áreas de primeira ordem por linhas críticas de segunda ordem.

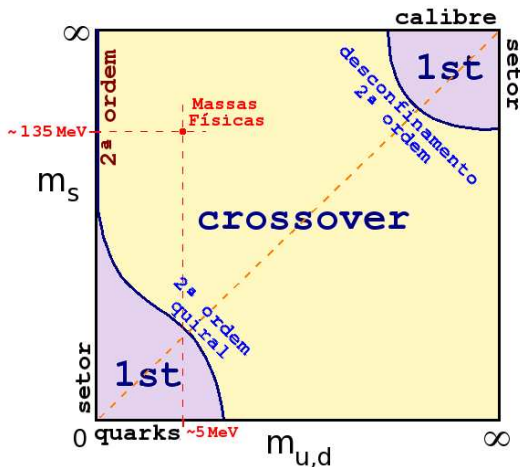


Figura 3.1: Diagrama esquemático de Columbia para o diagrama de fases da QCD a três sabores em potencial químico nulo.

Na condição de potencial químico nulo, conforme as massas dos quarks são reduzidas de seus valores físicos para o limite quiral, observamos a transição *crossover* se transformando em uma linha de transição de segunda ordem. Para investigar o que acontece em potencial químico não nulo, precisamos incluir outro eixo μ perpendicular ao diagrama de Columbia. Ao considerar este novo eixo,

verificamos que as duas linhas críticas de segunda ordem desenvolvem as respectivas superfícies críticas.

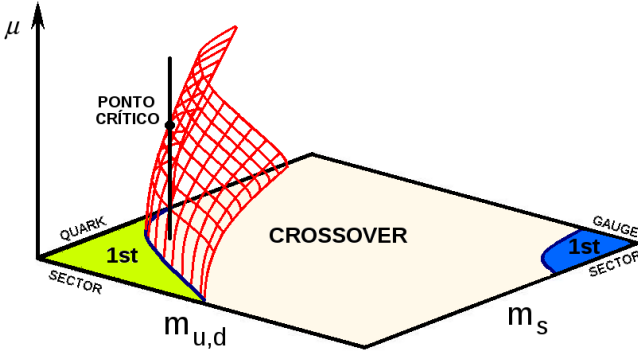


Figura 3.2: Superfícies geradas pelos valores críticos de potencial químico como função das massas dos quarks representando os resultados obtidos em simulações ordinárias na rede Ref. [57]. Para garantir a existência de um ponto crítico, a região de primeira ordem deve expandir-se ao longo do plano $m_{u,d} - m_s$.

Na Fig.(3.2) mostramos a curvatura da superfície crítica quiral conforme obtido por simulações na rede [57]. Em potencial químico finito e baixas temperaturas, os modelos efetivos sugerem que a restauração da simetria quiral ocorra por meio de uma transição de primeira ordem. Isto pode ser visto posicionando-se sobre as coordenadas para as massas físicas dos quarks e estendendo uma linha reta vertical. Essa linha encontrará a superfície crítica em um dado ponto crítico. Deste modo, passamos de uma região de *crossover* para um ponto crítico e então para o domínio de primeira ordem. Para tornar isso possível, e assegurar a existência de um ponto crítico no diagrama de fases, a superfície crítica deve curvar-se suficientemente de modo a interceptar a linha reta considerada. A partir destes argumentos, concluímos que a região de primeira ordem deve expandir-se ao longo do plano $m_{u,d} - m_s$ quando o potencial químico aumentar para permitir o aparecimento do ponto crítico.

Como as simulações exatas da rede em densidade bariônica finita apresentam a dificuldades em função do problema do sinal, muitas técnicas de aproximação foram desenvolvidas para superar esta dificuldade. O método mais comum consiste na expansão de Taylor em

potências de μ/T para as massas críticas

$$\frac{m_c(\mu)}{m_c(0)} = 1 + \sum_{k=1} c_k \left(\frac{\mu}{\pi T} \right)^{2k}, \quad (3.1)$$

onde os coeficientes c_k são sempre positivos nas simulações convencionais ($c_1 > 0$). Outra possibilidade é estabelecer um potencial químico imaginário e neste caso obtém-se o caso exótico onde este coeficiente pode assumir valores negativos ($c_1 < 0$).

Apesar dos requisitos apresentados acima para a existência do ponto crítico, algumas simulações numéricas na rede em potencial químico imaginário contradizem estes argumentos. Cálculos realizados por de Forcrand e Philipsen [57] mostraram que a região de primeira ordem não deve expandir, mas sim encolher com o aumento do potencial químico, assegurando que a razão seja μ/T seja pequena (veja Fig.(3.3)). Este encolhimento observado na superfície crítica impediria o aparecimento de uma transição de primeira ordem para os valores físicos das massas dos quarks. Portanto, esse resultado discorda do trabalho anterior proibindo a existência de um ponto crítico.

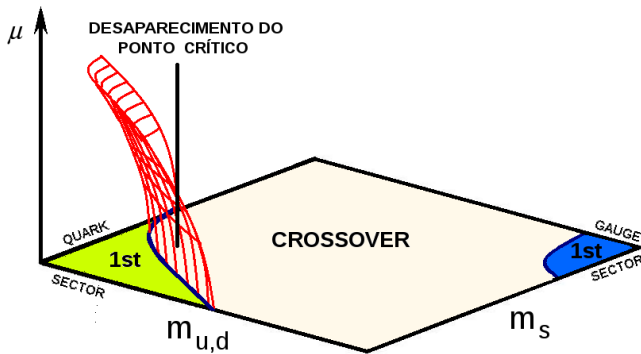


Figura 3.3: Resultado “exótico” obtido por de Forcrand e Philipsen [57] em potencial químico imaginário mostrando o encolhimento da superfície quiral crítica.

Para fornecer uma explicação razoável e compreender estas conclusões, Fukushima [58] sugeriu que uma atenuação ou até mesmo o desaparecimento do ponto crítico podem ser observados quando introduz-se um termo vetorial de interação na formulação lagrangiana. Esta contribuição poderia enfraquecer a região de primeira ordem e justificar o resultado incomum obtido por de Forcrand e Philipsen. Usando

a versão SU(3) do modelo PNJL, Fukushima apontou que a inclusão de um canal de acoplamento vetorial repulsivo $G_V(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^2$, poderia explicar inicialmente este encolhimento da superfície. Entretanto, se o efeito repulsivo do acoplamento vetorial não for muito intenso, e a razão μ/T torna-se grande, a densidade irá aumentar favorecendo a transição de primeira ordem novamente. Deste modo, a expansão da região de primeira ordem pode ser retomada por um dobramento posterior (*back-bending*) da superfície crítica e a existência de um ponto crítico pode ser reconsiderada validando os resultados convencionais da rede (veja Fig.(3.4)).

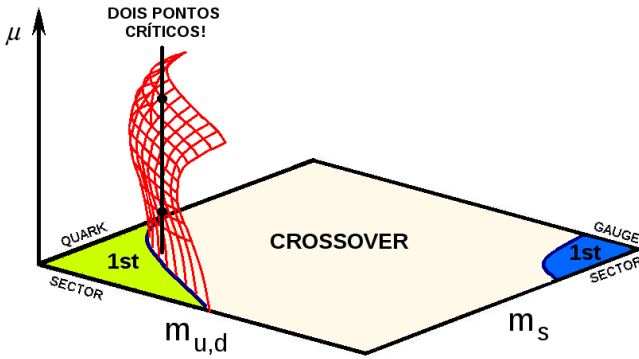


Figura 3.4: De acordo com Fukushima [58], a introdução de um acoplamento vetorial repulsivo pode resultar em um encolhimento inicial da região de primeira ordem. Entretanto, a medida que o potencial químico cresce a expansão é retomada se o acoplamento não for muito intenso. Com esta dobra, a linha vertical posicionada em massas não físicas pequenas pode interceptar a superfície duas vezes implicando na observação de mais de um ponto crítico.

Resultados similares foram obtidos por Bowman e Kapusta [59] empregando uma análise do modelo sigma linear (LSM) [31] na presença de flutuações térmicas nos campos mesônicos. Eles obtiveram um padrão exótico com dois pontos críticos para o diagrama de fases no plano $T - \mu$. Outro trabalho anterior neste assunto [60] empregando teoria de perturbação otimizada (OPT) [61], mostrou que o método de OPT pode prever múltiplos pontos críticos em um regime de acoplamento escalar forte sem a inclusão de quaisquer termos vetoriais. Este resultado suporta a possibilidade do cenário de *back-bending*.

Nossa discussão aqui refere-se a possibilidade de observar resultados semelhantes de *back-bending* pelo uso de um modelo efetivo simples como o NJL SU(2) com um canal de acoplamento vetorial. Neste caso,

não será necessário considerar o *loop* de Polyakov como no trabalho realizado por Fukushima. Pretendemos assim comparar este resultado de campo médio e Interação Vetorial com os cálculos fornecidos pela OPT. No apêndice C apresentamos uma pequena revisão acerca deste método variacional quando aplicada no modelo SU(2) de NJL. Os resultados gerais referentes ao desenvolvimento deste capítulo estão publicados na referência [62].

3.1 Contribuição Vetorial no Modelo NJL

Em densidades finitas, a população de hadrons presentes na matéria nuclear pode influenciar a dinâmica do sistema, inserindo novos termos de interação na formulação de campo efetivo original. Sabe-se das propriedades dos núcleos que a estabilidade da matéria nuclear é somente possível se introduz-se um termo vetorial repulsivo para balancear o campo escalar atrativo forte. Este equilíbrio de ligação leva a condição de saturação da densidade nuclear, fato o qual foi extensivamente verificado em laboratório. A aplicação do modelo de Walecka [63, 64] para a matéria nuclear mostrou que a magnitude G_V do canal de acoplamento vetorial é essencial para reproduzir os resultados experimentais.

Assim, considerando uma contribuição vetorial a lagrangiana de Nambu–Jona-Lasinio temos

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi + G_S[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2] - G_V(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^2 . \quad (3.2)$$

Pela aplicação do mesmo procedimento de bosonização usado na seção 2.5.2, um novo campo bosônico auxiliar é implementado $V^\mu = -2G_V\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ e podemos introduzir o termo quadrático, $V_\mu V^\mu$, na lagrangiana sem modificar as equações de movimento

$$G_V(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^2 = \bar{\psi}(2G_V\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)\gamma^\mu\psi - \frac{1}{4G_V}(-2G_V\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)(-2G_V\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) , \quad (3.3)$$

a qual nos leva a versão bosonizada da lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi - (\sigma\bar{\psi}\psi + \bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}\psi - \bar{\psi}V_\mu\gamma^\mu\psi) \\ & - \frac{1}{4G_S}(\sigma^2 + \pi^2) - \frac{1}{4G_V}(V_\mu V^\mu) . \end{aligned} \quad (3.4)$$

Se escolhermos considerar excitações somente no plano $\vec{\pi} = 0$, temos

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\vec{\partial} - m)\psi - (\sigma\bar{\psi}\psi - \bar{\psi}V_\mu\gamma^\mu\psi) - \frac{\sigma^2}{4G_S} - \frac{1}{4G_V}(V_\mu V^\mu) . \quad (3.5)$$

3.2 Efeitos em Alta Temperatura e Meio Denso

Conforme mais partículas são introduzidas no sistema de quarks, maior é a parcela de energia necessária para incluir outras. Para levar em consideração o efeito provocado por um reservatório de partículas, precisamos incluir sua contribuição $\mu\psi^\dagger\psi$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\vec{\partial} - m)\psi - \sigma\bar{\psi}\psi + \mu\psi^\dagger\psi + \bar{\psi}V_\mu\gamma^\mu\psi - \frac{\sigma^2}{4G_S} - \frac{1}{4G_V}(V_\mu V^\mu) . \quad (3.6)$$

A partir daqui, negligenciamos as componentes espaciais do termo de acoplamento vetorial $\bar{\psi}V_i\gamma^i\psi$. Isso pode ser justificado pelo fato de que para a matéria densa a repulsão vetorial sentida no referencial de um quark em relação aos demais deve ser isotrópica. Em outras palavras, dado o campo vetorial V^μ , se ao calcularmos seu campo médio e o resultado apresentasse uma direção específica, isso significaria a existência de uma direção preferencial no sistema, o que não deve ocorrer. A parte restante então pode ser facilmente unida ao termo de densidade de partículas $\mu\bar{\psi}\gamma^0\psi$. Também podemos notar que $V_0 V^0 = (-2G_V\psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi)(-2G_V\psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi) = 4G_V^2\rho^2$ e assim temos

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\vec{\partial} - m)\psi - \sigma\bar{\psi}\psi + \psi^\dagger(\mu - 2G_V\rho)\psi - \frac{\sigma^2}{4G_S} - G_V\rho^2 . \quad (3.7)$$

Agora, definimos as expressões para a massa efetiva M e para o potencial químico efetivo $\tilde{\mu}$, com as respectivas substituições $\bar{\sigma} = (M - m) = -2G_s\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ nós temos

$$M = m - 2G_s\langle\bar{\psi}\psi\rangle , \quad (3.8)$$

$$\tilde{\mu} = \mu - 2G_V\langle\psi^\dagger\psi\rangle .$$

onde $\rho = \langle\psi^\dagger\psi\rangle$ e o condensado escalar $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ é calculado de acordo com a expressão Eq.(2.43). Se substituimos estas igualdades na lagrangiana de NJL encontramos

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - M)\psi + \tilde{\mu}\psi^\dagger\psi - \frac{(M - m)^2}{4G_S} - \frac{(\mu - \tilde{\mu})^2}{4G_V}, \quad (3.9)$$

onde o inverso do propagador de quark S^{-1} é obtido considerando os primeiros três termos na lagrangiana

$$S^{-1} = (\not{p} - M + \tilde{\mu}\gamma^0). \quad (3.10)$$

O comportamento termodinâmico da lagrangiana pode ser determinado integrando-se sobre os campos fermiônicos para produzir o potencial grande canônico

$$\begin{aligned} \Omega(\mu, T, M, \tilde{\mu}) &= \frac{(M - m)^2}{4G_S} + \frac{(\mu - \tilde{\mu})^2}{4G_V} \\ &+ 2iN_cN_f \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln[p^2 - (M - \tilde{\mu})^2]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Somando sobre as frequências de Matsubara $p^0 \rightarrow (2\nu + 1)\pi T$, o potencial termodinâmico pode ser escrito como

$$\Omega(\mu, T, M, \tilde{\mu}) = \frac{(M - m)^2}{4G_S} + \frac{(\mu - \tilde{\mu})^2}{4G_V} + \Omega_T(\tilde{\mu}, T, M), \quad (3.12)$$

cuja contribuição térmica de meio denso $\Omega_T(\tilde{\mu}, T, M)$ é avaliada como

$$\Omega_T = -2N_cN_f \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \{E_p + T \ln[1 + e^{-(E_p \pm \tilde{\mu})/T}]\}. \quad (3.13)$$

Visto que o potencial termodinâmico depende basicamente de duas variáveis efetivas M e $\tilde{\mu}$ para um dado par de parâmetros de controle (μ, T) , o estado de vácuo do sistema é encontrado por meio das seguintes condições de minimização

$$\frac{\partial \Omega}{\partial M} = \frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{\mu}} = 0. \quad (3.14)$$

Calculando estas derivadas, chega-se a um conjunto autoconsistente de equações acopladas

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Omega}{\partial M} &= \frac{M - m}{2G_S} - 2N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{M}{E_p} \left[1 - n_p(\tilde{\mu}, T) - \bar{n}_p(\tilde{\mu}, T) \right] = 0, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{\mu}} &= \frac{\mu - \tilde{\mu}}{2G_V} - 2N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[n_p(\tilde{\mu}, T) - \bar{n}_p(\tilde{\mu}, T) \right] = 0,\end{aligned}\tag{3.15}$$

onde n_p e \bar{n}_p são os números de ocupação de Fermi Eq.(2.59) como foi assumido no capítulo anterior. Resolvendo numericamente este sistema acoplado empregando a mesma estratégia usada antes, nos permitirá obter os diagramas de fases na presença de um acoplamento vetorial.

Ao introduzirmos um acoplamento vetorial no modelo de NJL existe o problema de se especificar um valor para o parâmetro G_V visto que este canal está associado a formação do méson vetorial ω cuja massa $m_\omega = 782.65 \pm 0.12$ MeV é superior a escala de energia determinada pelo *cutoff*. Afirmção similar pode ser feita em relação ao méson isovetorial ρ caso seja considerado um termo isovetorial na lagrangiana de NJL. Não podemos elevar arbitrariamente o valor de Λ porque a massa efetiva obtida não seria fenomenologicamente válida. Dessa forma, G_V é considerado um parâmetro livre e estimativas de seu valor abrangem o intervalo $0.25G_S \leq G_V \leq 0.50G_S$ [65, 66]. Outros trabalhos buscam fixar a constante de acoplamento vetorial através de diferentes técnicas e situam seu valor no intervalo $0.3G_S \leq G_V \leq 3.2G_S$ [67, 68, 69].

Recentemente, Steinheimer e Schramm [70] questionaram se é possível limitar valores para o acoplamento vetorial da QCD por meio das susceptibilidades bariônicas calculadas na rede. De acordo com isso, suas conclusões estabelecem um comportamento variável de G_V no diagrama de fases, de tal forma que G_V deve ser mais intenso para a fase hadrônica e $G_V \approx 0$ na fase desconfiada. Também nesse contexto, Sugano et al. [71] usando resultados da rede fixaram um valor para a repulsão vetorial de $G_V \approx 0.33G_S$ comparando-os com previsões do modelo EPNJL (*Entanglement Polyakov-loop Nambu–Jona-Lasinio*). Apesar destes esforços, até o momento considera-se que o valor da constante de acoplamento vetorial da QCD é desconhecido.

3.3 Resultados na Aproximação de Campo Médio

Como discutido no início, a inserção da interação vetorial deve afetar as características do diagrama de fases principalmente por um encolhimento da região de primeira ordem a medida que este acoplamento vetorial aumenta em intensidade. Examinando a componente nula deste termo vetorial na Eq.(3.7) percebemos que sua influência acontece por meio de dois termos $-2G_V\rho\bar{\psi}\gamma^0\psi + G_V\rho^2$. O termo proporcional a ρ apenas causa um deslocamento no potencial químico original $\tilde{\mu} = \mu - 2G_V\rho$. Quando a densidade aumenta, o acoplamento repulsivo age de modo a diminuir o potencial químico efetivo proporcionalmente a este incremento. Deste modo, a densidade e a influência vetorial possuem efeitos opostos. Conforme o acoplamento vetorial fica mais intenso no termo quadrático $G_V\rho^2$, o potencial termodinâmico se reduz. Consequentemente, a pressão também diminui e deste modo a forma característica para a primeira ordem no potencial termodinâmico torna-se menos evidente. Este enfraquecimento da primeira ordem pode ser visto na Fig.(3.5) a qual foi obtida por meio da parametrização padrão $G_S\Lambda^2 = 2.44$, $\Lambda = 587.9$ MeV no limite quiral.

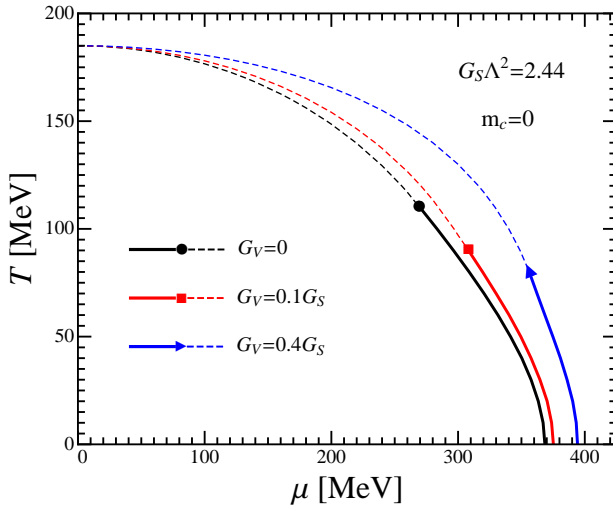


Figura 3.5: Diagramas de fase obtidos com o valor de constante de acoplamento $G_S\Lambda^2 = 2.44$. A medida que a intensidade do acoplamento vetorial se eleva, verificamos que a região de primeira ordem torna-se enfraquecida a que os valores para o potencial químico de coexistência são deslocados para valores mais altos.

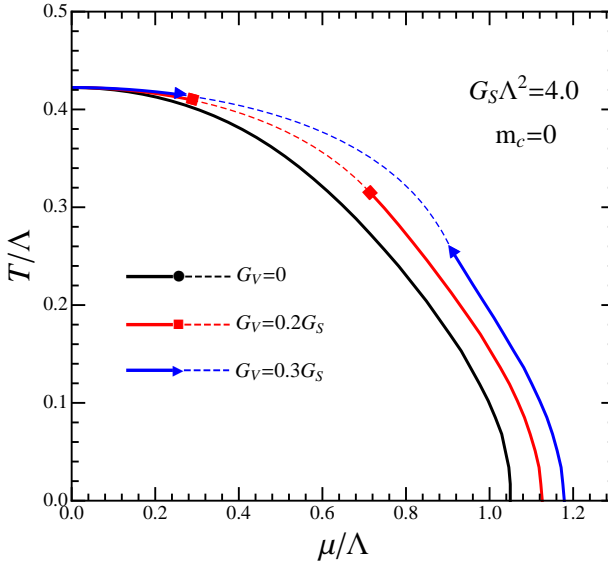


Figura 3.6: Diagrama de fases obtidos no regime de acoplamento forte $G_S\Lambda^2 = 4$. As linhas cheias representam a transição de fase de primeira ordem, enquanto as linhas tracejadas referem-se a transição de fase de segunda ordem. Quando o acoplamento vetorial é mantido nulo, o contorno de fase torna-se todo de primeira ordem. Aumentando a magnitude da interação vetorial faz com que o domínio da primeira ordem enfraqueça e fique apenas um padrão de dois pontos críticos.

Por outro lado, o acoplamento escalar atrativo G_S possui o efeito contrário, conforme sua magnitude aumenta, a transição de primeira ordem torna-se favorecida. Portanto, no regime de acoplamento escalar forte a transição de primeira ordem deve expandir. Se um dos parâmetros tem o efeito de expandir a região de primeira ordem e o outro de encolhê-la, para um dado intervalo será possível observar dois pontos críticos em valores não físicos ($m_c < m_{\text{phys}} \simeq 5 \text{ MeV}$) para as massas dos quarks.

Ao escolher um valor maior para a constante de acoplamento escalar (e.g. $G_S\Lambda^2 \simeq 4$), devemos produzir uma condição intermediária se adicionalmente alterarmos a intensidade do acoplamento vetorial. Na Fig.(3.6) mostramos um diagrama de fases obtido no regime de acoplamento forte. Esta estrutura de dois pontos críticos no diagrama de fases assemelha-se ao comportamento demonstrado por sistemas metamagnéticos sob temperatura e campo magnético externo. Para gerar estes diagramas de fases exóticos precisamos aumentar suficientemente a constante de acoplamento escalar G_S de modo a

ampliar a região de primeira ordem contra o efeito de enfraquecimento do termo vetorial. Um cuidado adicional deve ser tomado aqui porque estes valores elevados de G_S definem também valores altos de massas efetivas para os quarks as quais tornam-se maiores do que o próprio *cutoff*, Λ . Embora tenhamos valores altos para as massas dos quarks nessas condições, estes resultados não são de fato observáveis físicos. Esta parametrização não padrão, $\Lambda = 587.9$ MeV, $G_S\Lambda^2 = 4$ e $m = 0$, nos leva às seguintes quantidades fenomenológicas não usuais, $M_{vac} \simeq 836$ MeV, $-\langle\bar{\psi}\psi\rangle^{1/3} \simeq 263$ MeV, $f_\pi^2 \simeq 92$ MeV e $m_\pi^2 = 0$. No entanto, nosso propósito aqui é apenas demonstrar qualitativamente a conjectura do *back-bending* por meio da investigação da versão mais simples do modelo NJL associado a uma interação vetorial. Os dois pontos críticos devem aparecer somente quando as massas nuas dos quarks são menores que o valor físico e portanto não podem ser observados em um experimento real.

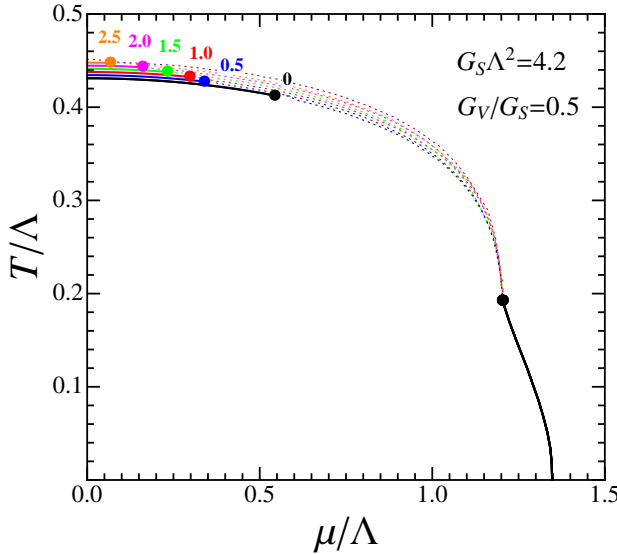


Figura 3.7: Desaparecimento do ponto crítico adicional conforme a massa de corrente dos quarks se eleva. Os correspondentes valores da massa dos quarks são mostrados no gráfico em unidades de MeV.

Quando variamos a massa de corrente dos quarks, partindo do limite quiral para valores próximos as massas físicas, o ponto crítico adicional deve receder até seu desaparecimento. Observando o

diagrama de Columbia em μ finito, percebemos que conforme a massa dos quarks aumenta, a superfície crítica não pode ser interceptada duas vezes além de certos valores das mesmas.

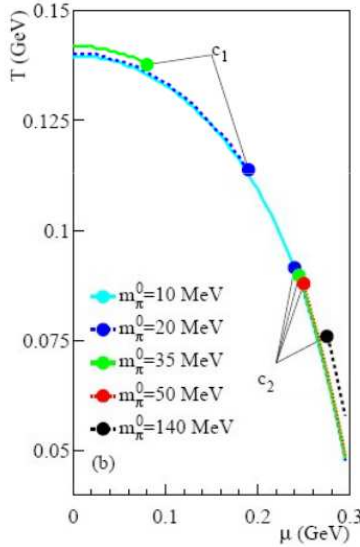


Figura 3.8: Resultado obtido na Ref. [60] usando o LSM [59] mostrando o mesmo padrão de múltiplos pontos críticos abaixo dos valores não físicos para a massa do pion.

Na Fig.(3.7), são mostrados os diagramas de fases em regime de acoplamento forte $G_S \Lambda^2 = 4.2$ para as respectivas massas de corrente dos quarks. O valor mais elevado na constante de acoplamento escalar foi escolhido de modo a tornar o *back-bending* evidente. De modo análogo, na Fig.(3.8) reproduzimos os gráficos avaliados usando [60] LSM. Acima do valor da massa do pion de 50 MeV, o ponto crítico não usual não pode ser observado mais e a região de primeira ordem extraordinária encolhe até desaparecer. Estes resultados podem ser comparados porque a massa do pion é numericamente relacionada a massa de corrente dos quarks por meio da relação de Gell-Mann–Oakes–Renner, Eq.(2.76).

3.4 Comparação com os Resultados da OPT

Constitui-se uma interessante questão comparar os diagramas de fases obtidos para os diferentes modelos considerados aqui. Como temos visto, o padrão de dois pontos críticos pode ser observado pela aplicação de MFA no modelo de NJL apenas na presença de uma contribuição vetorial repulsiva e constante de acoplamento escalar elevada o bastante em valores baixos de massa de corrente.

Por meio da aplicação da OPT ao modelo SU(2) de NJL obtém-se um resultado parecido apresentando dois pontos críticos sem a necessidade de introdução de qualquer termo vetorial. Como o método OPT introduz contribuições não triviais a expansão dos diagramas no dado parâmetro otimizado, as respectivas correções são equivalentes ao caso com um termo vetorial explícito como discutido em [60]. Estas correções do tipo $G_S \langle \psi^\dagger \psi \rangle / (N_c N_f)$ em OPT são suprimidas por um fator $1/N_c$ e no limite $N_c \rightarrow \infty$ o caso ordinário MFA é recuperado. Na Fig.(3.9), estes resultados são comparados e pode-se observar a ausência de múltiplos pontos críticos na técnica de MFA simples. Pela introdução de um termo vetorial na expansão MFA ou através das correções não triviais consideradas no método OPT, podemos observar dois pontos críticos no diagrama de fases.

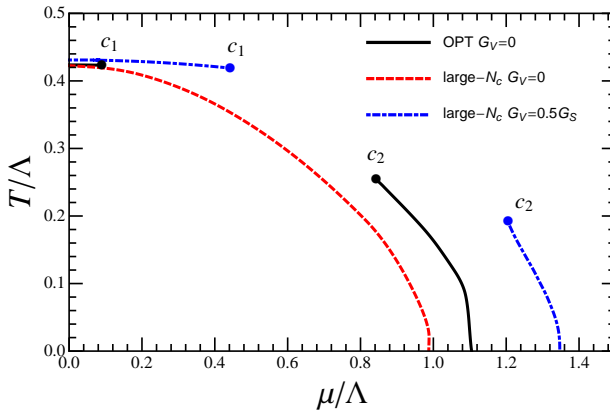


Figura 3.9: Respetivos diagramas de fases obtidos pela aplicação dos métodos de MFA e OPT. O padrão de dois pontos críticos aparece no método de campo médio MFA somente na presença de um G_V não nulo. O gráfico de OPT foi extraído da Ref.[60]. Uma massa de corrente dos quarks de $m = 0.1$ MeV foi usada aqui.

Além disso, na Fig.(3.10), mostramos a dependência da posição do ponto crítico no eixo do potencial químico em função da massa de corrente dos quarks em MFA com $G_V = 0$.

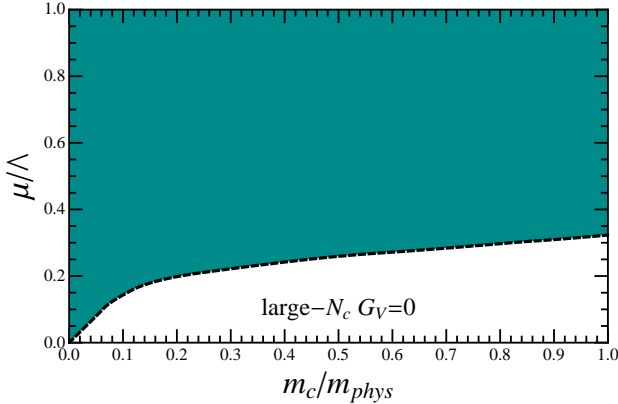


Figura 3.10: Dependência do potencial químico do ponto crítico em função da massa de corrente dos quarks como obtido com MFA.

Apenas um ponto crítico é observado e a linha crítica expande no plano $\mu - m$ quando a massa dos quarks aumenta. Pela introdução de uma interação vetorial na lagrangiana obtém-se o resultado apresentado na Fig.(3.11).

Observamos que a região de primeira ordem relativa ao ponto crítico adicional não aparece acima de certos valores de massa nua dos quarks. Nos valores de massa física, a região de primeira ordem com baixo μ não é mais observada e somente sobra a componente de primeira ordem em μ elevado. Entre estas duas regiões de primeira ordem existe um *crossover* o qual torna-se uma linha de segunda ordem no limite quiral.

Na Fig.(3.12), mostramos também os resultados obtidos pela aplicação [60] da OPT. Em virtude de sua dependência não trivial no acoplamento (não perturbativa), o formalismo de OPT vai além da usual expansão da teoria de perturbação, trazendo correções de ordem $1/N_c$ ao potencial termodinâmico de MFA. Comparando nossos resultados em MFA com aqueles obtidos pelo cálculo de OPT [60], observamos que ambos preveem o *back-bending* da linha crítica. Em ambos os cálculos observamos o segundo ponto crítico regredindo conforme a massa dos quarks aproxima-se de seu valor físico. O efeito somente é visível em MFA por causa da inserção da interação vetorial

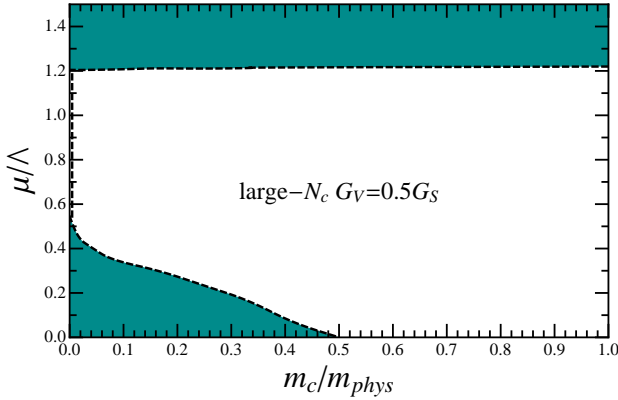


Figura 3.11: Dependência do potencial químico do ponto crítico em função da massa de corrente dos quarks como obtido com MFA na presença de um termo de interação vetorial.

em regime de acoplamento escalar forte. Ao utilizar o formalismo OPT não precisamos incluir a interação vetorial para obter termos além da expansão perturbativa. As correções radiativas do método OPT naturalmente dão origem a um termo de repulsão vetorial de magnitude $G_S/(N_c N_f)$. Recentemente [72], mostrou-se que a expansão OPT é capaz de reproduzir eficazmente as curvaturas associadas a susceptibilidade de quarks sem a necessidade de adotar a um canal de interação vetorial no modelo. Concluindo, usando a expansão OPT não existe o problema de se especificar um valor para o parâmetro G_V como ocorre no modelo NJL. Isso representa uma grande vantagem pois como já dissemos o valor de G_V é de fato desconhecido. Como uma técnica poderosa, o método OPT chega a resultados semelhantes sem a necessidade de considerar uma contribuição vetorial.

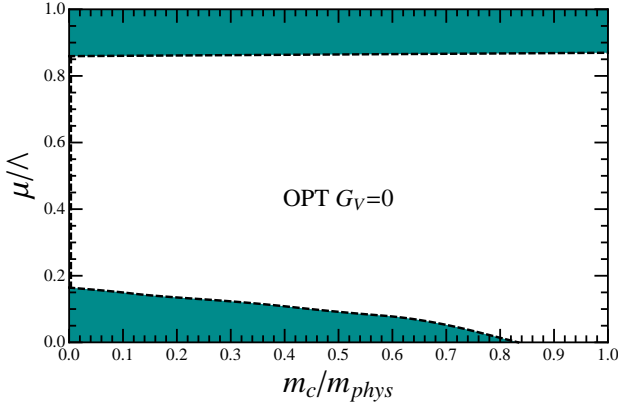


Figura 3.12: Dependência do potencial químico do ponto crítico em função da massa de corrente dos quarks como obtido na Teoria de Perturbação Otimizada (OPT). Gráfico extraído da Ref. [60].

3.5 Considerações Finais

Nossa análise do modelo NJL SU(2) com contribuição vetorial revelou o encolhimento da região de primeira ordem à medida que a magnitude do acoplamento G_V cresce. Ao mesmo tempo, confirmamos a possibilidade de *back-bending* no regime de acoplamento escalar forte por meio da emergência de dois pontos críticos no diagrama de fases. A aplicação deste método perturbativo com o termo vetorial demonstrou resultados parecidos com aqueles obtidos por OPT.

No capítulo seguinte devemos explorar a influência de campos magnéticos intensos no diagrama de fases no modelo NJL. Além das questões normalmente abordadas neste contexto, também incluiremos a contribuição vetorial como realizado aqui. Como veremos, o campo magnético e o canal de interação vetorial produzem efeitos contrários no diagrama de fases os quais podem ser devidamente comparados.

Capítulo 4

Interação Vetorial na Matéria de Quarks Magnetizada

Nos últimos anos, a compreensão teórica dos processos que governam a natureza das transições de fase da matéria hadrônica foi melhorada pela observação de que campos magnéticos ultraintensos estariam presentes nos ambientes onde estes fenômenos ocorrem [73, 74]. O ordem de grandeza típica destes campos pode variar de $10^{12} - 10^{19} \text{ G}$, e a energia que armazenam podem disparar mecanismos de interação que não são conhecidos até o momento ^{1 2}.

Fortes campos magnéticos podem ser gerados pela corrente de feixes em colisões não centrais de íons pesados [75]. Ao colidir relativisticamente grandes núcleos com parâmetro de impacto não nulo, implica que o fluxo oposto dos nucleons espectadores produz um campo

¹Aqui, as unidades do campo magnético são dadas em termos da massa do pión, com $eB \approx m_\pi^2$ ou equivalentemente um campo de $m_\pi^2 \approx 10^{18} \text{ G}$, onde $m_\pi = 140 \text{ MeV}$ e $m_\pi^2 \simeq 0.02 \text{ GeV}^2$.

²É importante mencionar que os campos magnéticos considerados aqui são de natureza estritamente eletromagnética e não relativos aos campos cromomagnéticos de cor.

magnético transitório no plano de reação. Além disso, campos elétricos também podem ser criados nestas colisões pela flutuação na posição dos prótons e sua correlação com o campo magnético poderia revelar a existência do efeito magnético quiral. Este efeito diz que um campo magnético intenso pode causar uma distinção entre as helicidades direita e esquerda e estabelecer uma corrente elétrica anômala ao longo de sua direção. Esta corrente induzida j_B no plasma carregado conduz a uma separação de cargas positivas e negativas. Questiona-se correntemente que através da medida desta separação de carga seria possível determinar a condutividade elétrica da matéria quente [76]. Na Fig.(4.1), é mostrado um resultado teórico [76] para a magnitude dos campos elétricos e magnéticos no centro de colisão como função do parâmetro de impacto, b . Podemos notar que temos valores absolutos não nulos comparativamente iguais para os valores médios dos campos elétricos e magnéticos, $\langle |B_x| \rangle$, $\langle |E_x| \rangle$ e $\langle |E_y| \rangle$ no plano de reação xy . Para os observáveis que são sensíveis a esses campos deve-se levar em consideração as flutuações evento-por-evento das posições dos prótons dos núcleos em colisão. Neste caso, somente o campo $\langle |B_y| \rangle$ torna-se relevante pois resulta em flutuações que ocorrem em torno de valores não nulos de campo. O campo elétrico apesar de intenso não deve afetar os observáveis pois suas médias evento-por-evento flutuam em torno de zero como mostrado em [76].

O campo máximo alcançado deve ser aproximadamente dado pela energia da colisão, \sqrt{s} , enquanto o tempo característico transiente destes campos varia de 0.01 fm/c (LHC) a 0.1 fm/c (RHIC) [75]. Na Fig.(4.2), mostramos a evolução temporal deste campo magnético [77] para um fator de *boost* de Lorentz $\gamma = 100$ (energia do RHIC) sob diferentes valores de condutividade elétrica, σ , do plasma. Pode-se notar que o campo magnético deve persistir mais tempo quando há a resposta do meio é condutor em virtude das correntes de Foucault induzidas. Embora estes campos sobrevivam um tempo relativamente muito curto durante a colisão, sua influência na dinâmica das transições de fase não pode ser negada.

Além da possibilidade de ocorrência destes campos em colisões de íons pesados, campos magnéticos muito intensos também podem existir nos núcleos de estrelas densas. O fluido magnetohidrodinâmico carregado girando dentro de estrelas de nêutrons ordinárias pode originar campos magnéticos da ordem de $10^{12} - 10^{16} \text{ G}$ [18]. Também são observadas estrelas de nêutrons anômalas chamadas magnetares que desenvolvem campos magnéticos ainda mais intensos do ordem de 10^{18} G [17]. Campos magnéticos extremamente intensos, acima de 10^{24}

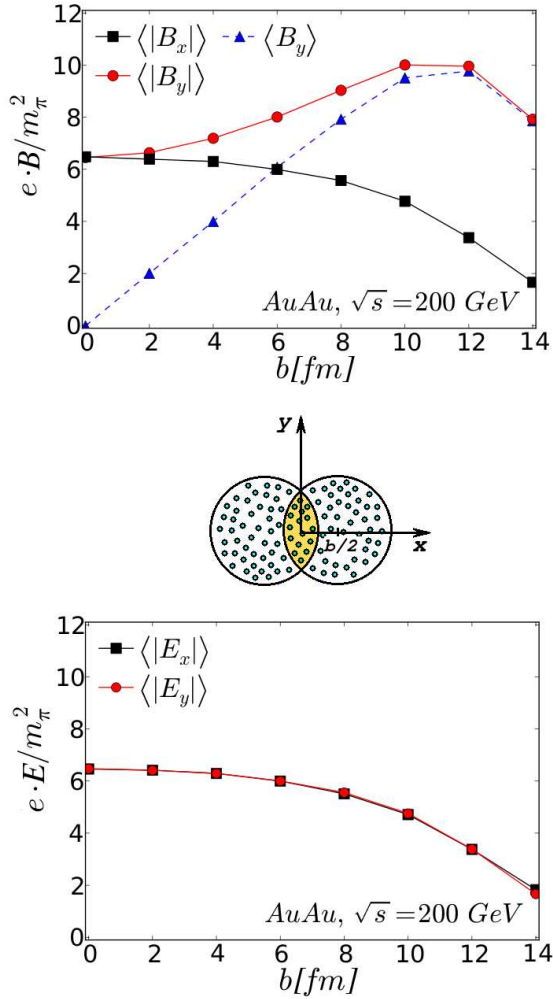


Figura 4.1: Valores absolutos médios em evento-por-evento dos campos elétrico e magnético como função do parâmetro de impacto (gráficos extraídos da Ref. [76]).

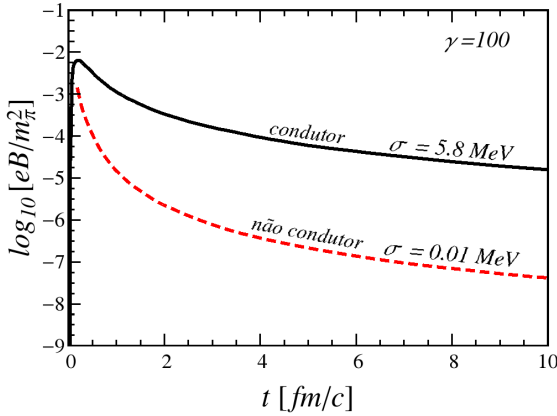


Figura 4.2: Evolução temporal do campo magnético criado por uma carga puntiforme para diferentes valores de condutividade elétrica. Gráfico extraído da referência [77]. Em meio condutor o declínio do campo magnético é mais lento.

G , também estavam presentes na evolução primordial do Universo, sobrevivendo até nossa era como um tênue resquício permeando o espaço [78, 79].

Em todos estes sistemas físicos, o campo magnético existente afeta de modo significativo a estrutura de fases da transição quiral. O comportamento de um volume infinito de matéria fermiônica sujeita a campos magnéticos e condições extremas de temperatura e/ou densidade pode ser descrito devidamente pela teoria efetiva de campo. Vários modelos efetivos podem ser usados para explorar a matéria de quarks magnetizada. Na física da matéria condensada encontramos os melhores exemplos da relevância em considerar tais efeitos em sistemas fermiônicos de baixa energia. O alinhamento e descrição de órbitas das partículas fermiônicas em um campo intenso poderiam induzir e alterar propriedades como a condensação e supercondutividade dos estados quânticos. Propriedades globais (*bulk*) como a densidade de partículas e a viscosidade (superfluidez) também podem sofrer modificações em um campo magnético desta natureza. Neste nível, possivelmente correções não locais e efeitos de troca também poderiam ser necessários para explicar as características deste tipo de matéria.

Por outro lado, a consideração de um canal de interação vetorial na teoria também torna-se importante para estabelecer um mecanismo de saturação. Seu caráter repulsivo reflete as forças de sustentação que impedem a matéria de colapsar para densidades mais elevadas. Estudar

as relações entre o campo magnético externo e uma contribuição vetorial pode implicar em novas características no diagrama de fases que não são observadas pela consideração desses efeitos separadamente.

Em temperaturas finitas e potencial químico não nulo observamos a Catálise Magnética Inversa [80] a qual reduz o valor de μ de coexistência e expande a região de primeira ordem no diagrama de fases. A consideração de uma interação repulsiva induz um efeito oposto pelo encolhimento da transição de primeira ordem e estabelece o potencial químico de coexistência em valores mais elevados. Deste modo, a transição quiral pode ocorrer em valores de densidade os quais estão mais relacionados com o caso onde o campo magnético está ausente. Na sequência, abordaremos os principais aspectos da inclusão de um canal de acoplamento vetorial no modelo NJL quando a matéria de quarks está sujeita a campos magnéticos externos.

4.1 Potencial Termodinâmico em Temperatura Finita

Partindo da densidade de lagrangiana para o modelo em estudo podemos considerar apenas a influência da interação vetorial por meio da seguinte expressão

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi + G_S[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2] - G_V(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^2, \quad (4.1)$$

onde a constante de acoplamento vetorial G_V é assumida positiva de modo a representar uma interação repulsiva. Como explicado no capítulo anterior, o correspondente potencial termodinâmico $\Omega(\mu, T)$ pode ser obtido pela consideração dos condensados não nulos

$$\rho_s = \langle \bar{\psi}\psi \rangle \quad \text{and} \quad \rho = \langle \psi^\dagger\psi \rangle. \quad (4.2)$$

Utilizando um procedimento de bosonização, podemos linearizar os bilineares quadráticos tornando explícita a dependência na densidade de partículas ρ e densidade de probabilidade do condensado quark-antiquark ρ_s . Desde que, na aproximação de campo médio semiclássica, o desvio dos valores assumidos pelo campo de seu valor médio é usualmente negligenciado e as seguintes relações podem ser obtidas

$$\begin{aligned}(\bar{\psi}\psi)^2 &\simeq 2\rho_s\bar{\psi}\psi - \rho_s^2, \\(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2 &\simeq 2\rho\bar{\psi}\gamma^0\psi - \rho^2.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Assim, em potencial químico finito a densidade de lagrangiana pode ser escrita simplesmente como antes

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - M + \tilde{\mu}\gamma^0)\psi - \frac{(M-m)^2}{4G_S} - \frac{(\mu-\tilde{\mu})^2}{4G_V}, \tag{4.4}$$

onde a massa efetiva é dada por $M = m - 2G_S\rho_s$ e o potencial químico deslocado é $\tilde{\mu} = \mu - 2G_V\rho$. Sem a influência do campo magnético, o potencial termodinâmico pode ser expresso como abaixo

$$\Omega = \frac{(M-m)^2}{4G_S} - \frac{(\mu-\tilde{\mu})^2}{4G_V} + \frac{i}{2} \text{Tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln [\not{p} - M + \tilde{\mu}\gamma^0], \tag{4.5}$$

onde o inverso do propagador fermiônico $S^{-1} = (\not{p} - M + \tilde{\mu}\gamma^0)$ deve conter somente os modos $p_0 \rightarrow i(\omega_\nu - i\mu)$ das frequências de Matsubara as quais resultam na antiperiodicidade dos campos fermiônicos válida no contorno do tempo imaginário.

A consideração adicional de um campo magnético constante na direção z irá quebrar a invariância esférica espacial dos campos de férmions no plano xy . As partículas e antipartículas de carga elétrica ³ absoluta $|q_f|$ irão descrever órbitas circulares de momentum quantizado $p_x^2 + p_y^2 = (2n + 1 - s)|q_f|B$ nos n níveis de Landau [81]. Assim, o momentum total pode ser substituído por

$$\mathbf{p}^2 \rightarrow p_z^2 + (2n + 1 - s)|q_f|B, \tag{4.6}$$

com o spin $s = \pm 1$ e $n = 0, 1, \dots$ os níveis de Landau. A energia total das partículas pode ser facilmente calculada como

$$E_{p,n}(B) = \sqrt{p_z^2 + (2n + 1 - s)|q_f|B + M^2}, \tag{4.7}$$

A substituição da integração do quadrimomentum no espaço de fase pelas frequências de Matsubara $\omega_\nu = (2\nu + 1)\pi T$, com $\nu =$

³Os sabores $f = u, d$ tem carga elétrica $q_u = +2/3e$ e $q_u = -1/3e$ respectivamente.

$0, \pm 1, \pm 2 \dots$ e pelos níveis quantizados de Landau implica [82] na seguinte redução dimensional

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \rightarrow i \frac{T |q_f| B}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{dp_z}{(2\pi)} . \quad (4.8)$$

Aplicando as últimas definições na Eq.(4.5), encontramos

$$\begin{aligned} \Omega = & \frac{(M-m)^2}{4G_S} - \frac{(\mu - \tilde{\mu})^2}{4G_V} \\ & - N_c \sum_{f=u}^d \frac{T |q_f| B}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{dp_z}{(2\pi)} \ln [(\omega_\nu - i\tilde{\mu})^2 + E_{p,n}^2] . \end{aligned} \quad (4.9)$$

Esta expressão pode ser devidamente avaliada usando o resultado bem conhecido para a soma de Matsubara, Eq.(2.54), separando a contribuição do vácuo da parte térmica. Além disso, a degenerescência dos estados no nível de Landau mais baixo (*Lowest Landau Level*, LLL) pode ser contabilizada pela mudança do índice de soma n por k

$$E_{p,k}(B) = \sqrt{p_z^2 + 2k|q_f|B + M^2} , \quad (4.10)$$

com a inclusão de um fator de degenerescência $\alpha_k = 2 - \delta_{k0}$ na respectiva soma. Assim obtemos

$$\begin{aligned} \Omega = & \frac{(M-m)^2}{4G_S} - \frac{(\mu - \tilde{\mu})^2}{4G_V} - \frac{N_c}{2\pi} \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (|q_f| B) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{2\pi} E_{p,k} \\ & - \frac{N_c}{2\pi} \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (|q_f| B) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \left\{ T \ln [1 + e^{-(E_{p,k} + \tilde{\mu})/T}] \right. \\ & \left. + T \ln [1 + e^{-(E_{p,k} - \tilde{\mu})/T}] \right\} . \end{aligned} \quad (4.11)$$

a qual pode ser escrita [83] separando cada contribuição nos seguintes termos

$$\Omega = \frac{(M-m)^2}{4G_S} - \frac{(\mu - \tilde{\mu})^2}{4G_V} + \Omega_{vac} + \Omega_{mag} + \Omega_{med} , \quad (4.12)$$

relativamente a parte do vácuo, Ω_{vac} , ao termo magnético não térmico, Ω_{mag} , e a contribuição magnética, Ω_{med} , do meio magnetizado, respectivamente. O primeiro termo na integral da Eq.(4.11) pode ser calculado como a soma de dois destes termos (veja Apêndice D)

$$-\frac{N_c}{2\pi} \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(|q_f|B) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{2\pi} E_{p,k} = \Omega_{vac} + \Omega_{mag} , \quad (4.13)$$

onde a contribuição do vácuo para o potencial termodinâmico é escrita como

$$\Omega_{vac} = -2N_c N_f \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} E_p , \quad (4.14)$$

a qual pode ser avaliada como (veja Apêndice A)

$$\Omega^{vac} = \frac{N_c N_f}{8\pi^2} \left\{ M^4 \ln \left[\frac{(\Lambda + \epsilon_\Lambda)}{M} \right] - \epsilon_\Lambda \Lambda [\Lambda^2 + \epsilon_\Lambda^2] \right\} , \quad (4.15)$$

onde o símbolo ϵ_Λ representa a energia $\sqrt{\Lambda^2 + M^2}$.

A parte magnética do potencial termodinâmico pode ser calculada definindo uma nova variável x_f (veja Apêndice D)

$$x_f = \frac{M^2}{(2|q_f|B)} , \quad (4.16)$$

e usando a função zeta de Riemann-Hurwitz $\zeta(z, x_f)$

$$\zeta^{(1,0)}(-1, x_f) = \left. \frac{d\zeta(z, x_f)}{dz} \right|_{z=-1} , \quad (4.17)$$

com estas definições, a contribuição puramente magnética pode ser calculada como

$$\Omega_{mag} = -\frac{N_c}{2\pi^2} \sum_{f=u}^d (|q_f|B)^2 \left\{ \zeta^{(1,0)}(-1, x_f) - \frac{1}{2}(x_f^2 - x_f) \ln x_f + \frac{x_f^2}{4} \right\} , \quad (4.18)$$

e a contribuição do meio magnetizado para o potencial termodinâmico é dada por

$$\Omega_{med}|_{T \neq 0} = -\frac{N_c}{2\pi} \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(|q_f|B) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \left\{ T \ln [1 + e^{-(E_{p,k} + \tilde{\mu})/T}] \right. \\ \left. + T \ln [1 + e^{-(E_{p,k} - \tilde{\mu})/T}] \right\} . \quad (4.19)$$

Aplicando o procedimento de minimização ao potencial termodinâmico relativamente a massa efetiva M e ao potencial químico efetivo $\tilde{\mu}$, nós temos

$$\frac{\partial \Omega}{\partial M} = \frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{\mu}} = 0 , \quad (4.20)$$

e chegamos as seguintes equações de gap

$$\frac{\partial \Omega}{\partial M} = \frac{(M - m)}{2G_S} - \frac{MN_c N_f}{2\pi^2} \left(\Lambda \epsilon_{\Lambda} - \frac{M^2}{2} \ln \left[\frac{(\Lambda + \epsilon_{\Lambda})^2}{M^2} \right] \right) \\ - \frac{MN_c}{2\pi^2} \sum_{f=u}^d |q_f|B \left[\ln \Gamma(x_f) - \frac{1}{2} \ln(2\pi) + x_f \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (2x_f - 1) \ln(x_f) \right] + \frac{MN_c}{2\pi} \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(|q_f|B) \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \frac{1}{E_{p,k}} [n_{p,k}(\tilde{\mu}, T) + \bar{n}_{p,k}(\tilde{\mu}, T)] = 0 , \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{\mu}} = \frac{(\mu - \tilde{\mu})}{2G_V} - \frac{N_c}{2\pi} \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(|q_f|B) \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{2\pi} [n_{p,k}(\tilde{\mu}, T) - \bar{n}_{p,k}(\tilde{\mu}, T)] = 0 ,$$

onde os números de ocupação de partículas podem ser escritos agora como

$$n_{p,k} = \frac{1}{(1 + e^{(E_{p,k} - \tilde{\mu})/T})} \quad \bar{n}_{p,k} = \frac{1}{(1 + e^{(E_{p,k} + \tilde{\mu})/T})} . \quad (4.22)$$

A solução auto consistente deste conjunto acoplado dado pelas Eqs.(4.21) nos permitirá obter os valores estacionários da massa efetiva,

M , e potencial químico efetivo, $\tilde{\mu}$, em um dado estado (μ, T) e espaço de parâmetros dos valores de G_V e B . Estas soluções podem fornecer todas as quantidades termodinâmicas de interesse.

A densidade bariônica é também calculada da maneira estabelecida antes empregando a substituição Eq.(4.8)

$$\rho_B|_{T \neq 0} = \frac{N_c}{6\pi^2} \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(|q_f|B) \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \left(n_{p,k}(\tilde{\mu}, T) - \bar{n}_{p,k}(\tilde{\mu}, T) \right). \quad (4.23)$$

Esta última expressão nos permitirá verificar a dependência da densidade bariônica como função da intensidade do campo magnético e da magnitude do acoplamento vetorial.

4.2 Potencial Termodinâmico em Temperatura Zero

No limite de temperatura zero, a soma de Matsubara sobre os modos fermiônicos é dada em termos da seguinte função degrau

$$\lim_{T \rightarrow 0} T \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \ln[(\omega_\nu - i\tilde{\mu})^2 + E_{p,k}^2] = E_{p,k} + (\tilde{\mu} - E_{p,k})\Theta(\tilde{\mu} - E_{p,k}). \quad (4.24)$$

De acordo com este resultado, podemos estabelecer a parte do potencial termodinâmico que depende do meio como

$$\Omega^{med}|_{T=0} = -\frac{N_c}{2\pi} \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(|q_f|B) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{2\pi} (\tilde{\mu} - E_{p,k})\Theta(\tilde{\mu} - E_{p,k}). \quad (4.25)$$

Realizando esta integração temos como resultado uma expressão analítica (Apêndice E) dada em termos do potencial químico efetivo $\tilde{\mu}$ e massa efetiva M

$$\Omega^{med}|_{T=0} = -\frac{N_c}{4\pi^2} \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{k_{f,max}} \alpha_k|q_f|B \left\{ \tilde{\mu} \sqrt{\tilde{\mu}^2 - s_f(k, B)^2} - s_f(k, B)^2 \ln \left[\frac{\tilde{\mu} + \sqrt{\tilde{\mu}^2 - s_f(k, B)^2}}{s_f(k, B)} \right] \right\}, \quad (4.26)$$

onde $s_f(k, B) = \sqrt{M^2 + 2|q_f|kB}$. O número máximo de níveis de Landau $k_{f,max}$ necessários para acomodar todos os estados é dado pelo inteiro mais próximo da seguinte expressão

$$k_{f,max} = \frac{\tilde{\mu}^2 - M^2}{2|q_f|B}. \quad (4.27)$$

Empregando o procedimento variacional usual devemos observar as seguintes condições mínimas para o *gap* de massa e potencial químico efetivo no limite de temperatura nula

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial M} &= \frac{(M - m)}{2G_S} - \frac{MN_c N_f}{2\pi^2} \left[\Lambda \epsilon_\Lambda - \frac{M^2}{2} \ln \left(\frac{(\Lambda + \epsilon_\Lambda)^2}{M^2} \right) \right] \\ &\quad - \frac{MN_c}{2\pi^2} \sum_{f=u}^d |q_f|B \left[\ln \Gamma(x_f) - \frac{1}{2} \ln(2\pi) + x_f - \frac{1}{2}(2x_f - 1) \ln(x_f) \right] \\ &\quad + \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{k_{f,max}} \alpha_k \frac{MN_c(|q_f|B)}{2\pi^2} \ln \left[\frac{\tilde{\mu} + \sqrt{\tilde{\mu}^2 - s_f(k, B)^2}}{s_f(k, B)} \right] = 0 \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{\mu}} &= \frac{(\mu - \tilde{\mu})}{2G_V} - \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{k_{f,max}} \alpha_k \frac{N_c(|q_f|B)}{2\pi^2} \sqrt{\tilde{\mu}^2 - s_f(k, B)^2} = 0, \end{aligned} \quad (4.28)$$

Outra importante quantidade é a densidade bariônica, a qual pode ser calculada por meio do valor do momento de Fermi $k_F(k, s_f) = \sqrt{\tilde{\mu}^2 - s_f(k, B)^2}$

$$\rho_B|_{T=0} = \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{k_{f,max}} \alpha_k \frac{N_c(|q_f|B)}{6\pi^2} \sqrt{\tilde{\mu}^2 - s_f(k, B)^2} \quad (4.29)$$

O conjunto padrão de parâmetros usados aqui em nossa avaliação numérica é o seguinte $\Lambda = 590 \text{ MeV}$, $G_S = 2.435/\Lambda^2$ e $m = 6.0 \text{ MeV}$. Estes valores ajustam apropriadamente os valores fenomenológicos para a massa do pion m_π , a constante de decaimento do pion f_π e para o condensado de quarks $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$. Este conjunto de parâmetros apresenta uma pequena diferença em relação aos parâmetros utilizados anteriormente. Para comparar nossos cálculos com resultados obtidos previamente modificamos os valores de acordo.

Como discutido anteriormente, a massa do méson ω está acima do valor de Λ , e não podemos usá-la para ajustar devidamente um valor para o parâmetro de acoplamento vetorial G_V . Dessa forma, foram

escolhidos dois valores de acoplamento $G_V = 0.3G_S$ e $G_V = 0.5G_S$, os quais cancelam os efeitos proporcionados pelos valores de campo magnético $eB = 6 m_\pi^2$ e $eB = 15 m_\pi^2$ em temperatura zero como veremos adiante.

4.3 O Fenômeno da Catálise Magnética

Um dos fenômenos mais interessantes que ocorrem na matéria de quarks magnetizada é a Catálise Magnética [84], que como veremos tem importantes consequências no diagrama de fases. Na presença de um campo magnético de fundo, a transição da fase quiralmente simétrica para a fase quiralmente quebrada manifesta-se em valores menores de acoplamento escalar G_S que seriam necessários sem a sua influência.

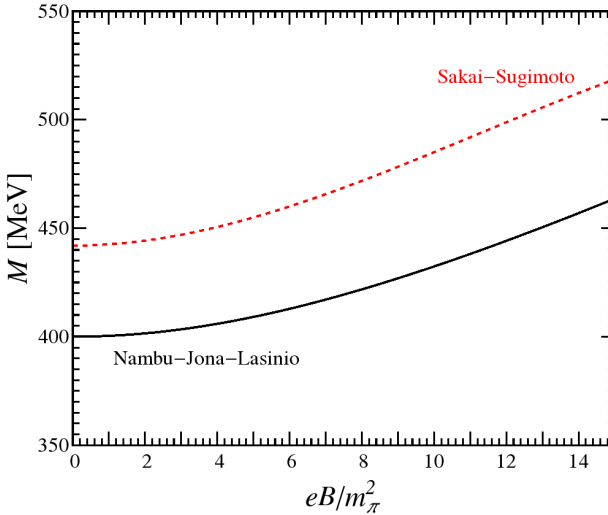


Figura 4.3: Aumento no valor da massa efetiva devido a catálise magnética observada no modelo de NJL e no modelo de Sakai-Sugimoto. (gráfico extraído da Ref. [85]). Os resultados apresentam a mesma dependência com o campo magnético exceto pelo deslocamento existente.

No modelo de NJL o resultado usual é observado como um aumento no valor da massa efetiva conforme a intensidade do campo magnético se eleva. Um comportamento similar é também verificado em cálculos baseados no princípio da holografia como o modelo Sakai-

Sugimoto [86] como pode ser visto na Fig.(4.3)⁴.

Os valores da massa efetiva dos quarks aumentam como função do campo magnético do mesmo modo em ambos os modelos. Os resultados diferem basicamente na linha de base provavelmente devido a escolha das constantes de acoplamento. É interessante mencionar que a catálise magnética não é um fenômeno exclusivamente relacionado aos quarks, mas também acontece em sistemas fermiônicos de energia mais baixa. Na Fig.(4.4) mostramos as orientações relativas entre o *spin*, \vec{s} , e o momento magnético de *spin*, $\vec{\mu}_S$, para estes pares de partículas. Como a razão giromagnética, γ , na relação $\vec{\mu}_S = \gamma \vec{s}$, depende da carga da partícula, a orientação do momento magnético será sempre contrária a direção do *spin* para cargas negativas. Neste caso, nos pares férmion–anti-férmion $\langle e \bar{e} \rangle$ e $\langle q \bar{q} \rangle$, a direção dos momentos magnéticos é a mesma. Ao aplicarmos um campo magnético ao par, o alinhamento ocorrerá da mesma maneira para cada elemento. Tal comportamento seria diferente para um par de Cooper, no qual os momentos magnéticos estão em oposição. Neste caso a aplicação de B resultaria no anti alinhamento dos dipolos magnéticos e a consequente quebra do par. Enquanto em um par férmion–anti-férmion o campo apresenta um efeito catalisador para a sua formação, no par férmion–férmion, ele contribui para sua dissociação.

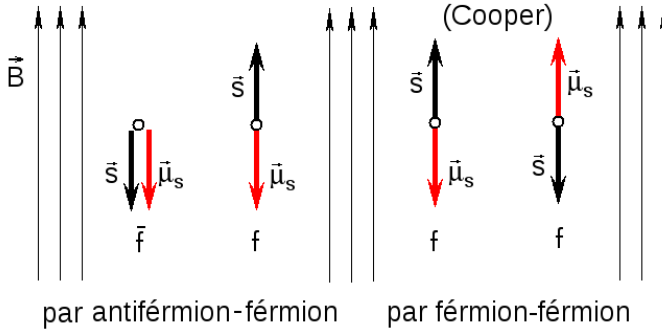


Figura 4.4: Comparação entre as direções relativas do *spin*, \vec{s} , e do momento magnético de *spin*, $\vec{\mu}_S$, nos pares de férmion–anti-férmion e férmion–férmion. A aplicação de um campo magnético externo B deve contribuir para a formação dos pares $\langle f \bar{f} \rangle$ e induzir a dissociação do par de Cooper $\langle f f \rangle$.

⁴Na realidade, uma comparação entre modelos holográficos e os resultados de modelos efetivos da QCD é somente conveniente com a última em um regime de acoplamento forte.

Outra consequência no modelo efetivo de NJL é o aumento da temperatura pseudo crítica T_{pc} com o campo magnético como podemos observar no painel superior da Fig.(4.5). Como esse aumento o meio magnético favorece a fase quebrada em $\mu = 0$. Tal característica é amplamente confirmada na maioria dos modelos efetivos, contudo, sua autenticidade ainda permanece uma questão em aberto em comparação com os resultados obtidos pela QCD na rede. A partir de cálculos na rede, existem dois resultados que apresentam o comportamento da temperatura pseudo crítica como função da influência do campo magnético. O primeiro cálculo na rede [87] realizado para verificar o comportamento da temperatura pseudo crítica nos mostra que a temperatura de transição aumenta somente um pouco conforme B cresce. Este resultado foi obtido para dois sabores de quarks e valores bastante elevados para a massa do pion ($m_\pi = 200 - 400$ MeV). Um segundo cálculo na rede [88] foi realizado e alguns aspectos foram melhorados em relação ao primeiro. Ao considerar 2+1 sabores de quark, o valor físico para a massa do pion ($m_\pi = 140$ MeV) e uma extrapolação para o contínuo, este trabalho [88] nos mostra que T_{pc} decresce a medida que a intensidade do campo externo se torna maior. Este resultado, mostrado no painel inferior da Fig.(4.5), difere do previsto pelos modelos efetivos como o NJL estudado aqui.

Estudos recentes [89, 90, 91, 92] têm procurado solucionar esta discrepância entre os cálculos da rede e os resultados dos modelos efetivos. Segundo [90], uma possível causa desse comportamento da temperatura pseudo crítica seria o recuo dos glúons devido ao acoplamento do campo magnético com o mar de quarks. Nesse contexto, um resultado interessante pode ser encontrado na Ref. [93], onde a influência da liberdade assintótica da QCD no comportamento de T_{pc} é simulada no modelo de NJL com dois sabores através de uma constante de acoplamento G_S variável. De acordo com Miransky e Shovkovy [84] a constante de acoplamento da QCD deve apresentar a seguinte dependência em relação ao campo magnético e o parâmetro de escala da QCD ($\Lambda_{QCD} \sim 200\text{MeV}$)

$$\frac{1}{\alpha_s} \sim \frac{(11N_c - 2N_f)}{12\pi} \ln \left(\frac{eB}{\Lambda_{QCD}^2} \right). \quad (4.30)$$

Dessa maneira, Farias et al. [93] propuseram uma constante de acoplamento $G_S(B)$ no modelo de NJL dependente do campo magnético dada por

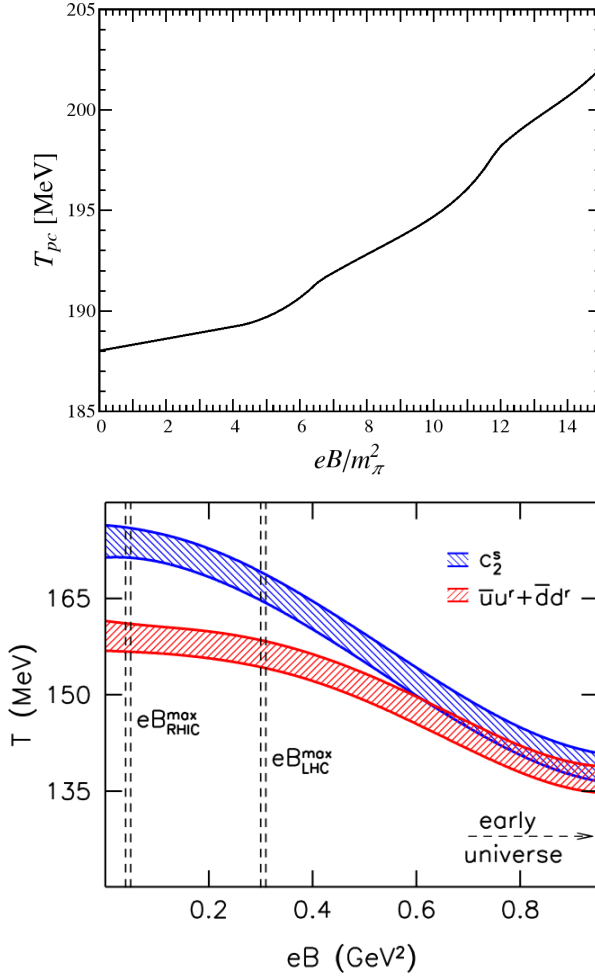


Figura 4.5: (Painel superior) Variação da temperatura pseudo crítica de crossover no modelo de NJL mostrando um aumento monotônico conforme a intensidade do campo magnético cresce. (Painel inferior) O mesmo cálculo da temperatura pseudo crítica obtido na rede extraído da Ref.[88] estabelecendo o comportamento oposto.

$$G_S(B) = \frac{G_{S0}}{1 + \alpha \ln \left(1 + \beta \frac{eB}{\Lambda_{QCD}^2} \right)}, \quad (4.31)$$

onde G_{S0} é a constante de acoplamento em $B = 0$; α e β são constantes. Na Fig.(4.6), mostramos o resultado extraído da Ref. [93] que mostra como é possível obter um resultado similar à rede para o comportamento de T_{pc} quando usamos o modelo de NJL com G_S dependente de B .

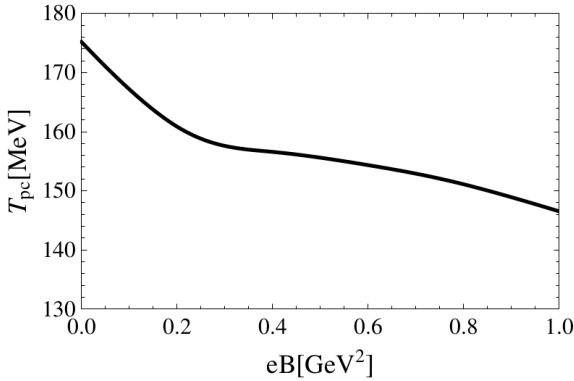


Figura 4.6: Comportamento da temperatura pseudo crítica no modelo de NJL com constante de acoplamento G_S dependente do campo externo. Gráfico extraído da Ref. [93]. Como T_{pc} decresce com a intensidade do campo magnético esse resultado mostra-se consistente ao determinado na rede.

Como as consequências da contribuição do canal vetorial devem aparecer somente em potencial químico não nulo, em $\mu = 0$ a catálise magnética não será afetada por sua inserção. O caráter repulsivo da contribuição vetorial deverá ter maior impacto na região de potencial químico finito devido ao seu balanceamento com o potencial escalar atrativo.

4.4 O Fenômeno da Catálise Magnética Inversa

Em potencial químico finito a influência do campo magnético na restauração da simetria quiral é essencialmente diferente do compor-

tamento observado em $\mu = 0$. Foi observado por Preis et al.[80] que o campo magnético cataliza a restauração para a fase quiralmente simétrica em contraste com a catálise magnética ordinária. Eles observaram este efeito usando um sabor de quark não massivo no modelo de NJL e também na técnica holográfica de Sakai-Sugimoto. Este efeito foi denominado Catálise Magnética Inversa porque a existência de um campo magnético de fundo irá favorecer a restauração da simetria quiral na região de $\mu \neq 0$. Isto ocorre porque o custo energético para formar um condensado quark-antiquark depende de ambos potencial químico e intensidade do campo magnético, de modo que proporcional a $\mu^2 B$. Quando aumentamos a intensidade do campo B o potencial químico de coexistência deve decrescer. Nem todos os estados são permitidos, mas somente aqueles compatíveis com o preenchimento dos níveis de energia de Landau.

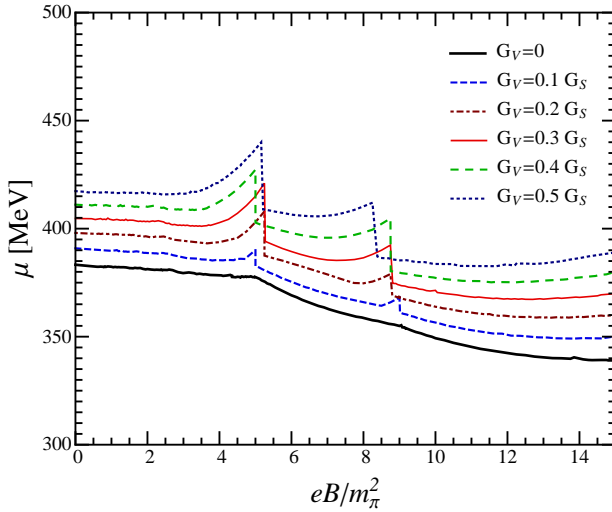


Figura 4.7: Potencial químico de coexistência em função de B a temperatura zero e acoplamento vetorial G_V variável. A interação vetorial enfraquece o decréscimo no contorno de fase que é devido a Catálise Magnética Inversa.

Na Fig.(4.7) são mostradas as curvas correspondentes a dependência do potencial químico de coexistência a temperatura nula com a intensidade do campo magnético externo e acoplamento da interação vetorial. Este gráfico foi determinado por meio da obtenção dos valores de potencial químico de coexistência em diagramas de fases construídos para B e G_V variáveis. A curva mais a esquerda com $G_V = 0$

ilustra o fenômeno da Catálise Magnética Inversa. A medida que o campo magnético aumenta o contorno de fase é deslocado para valores menores de potencial químico. Também podemos notar um comportamento oscilatório no contorno de fase que caracteriza a estrutura de níveis de energia de Landau. Estas oscilações são mais evidentes na região de B pequeno por causa do preenchimento dos níveis mais elevados de Landau. De acordo com o modelo NJL SU(3) [94], conforme o campo magnético cresce, o potencial químico de coexistência pode ser maior ou menor que o valor assumido em $B = 0$.

A inserção da interação vetorial irá afetar o contorno de coexistência como podemos ver na mesma figura. Com o aumento do acoplamento vetorial G_V , as curvas basicamente são deslocadas para valores mais elevados de potencial químico devido a mudança implícita na equação $\tilde{\mu} = \mu - 2G_V \rho$. O padrão de oscilações é quase o mesmo para pequenos valores de G_V , mas observa-se uma modificação substancial nos valores de $G_V = 0.4G_S$ e $G_V = 0.5G_S$. Nós também observamos o potencial químico de coexistência aumentando em valores mais elevados de B quando a interação vetorial está presente.

4.5 Análise do Diagrama de Fases

Vamos considerar agora os deslocamentos relativos as coordenadas do ponto crítico conforme o campo magnético e acoplamento vetorial são variados. Como dissemos antes, a região de primeira ordem do diagrama de fases é reforçada com o aumento do campo magnético e enfraquecida com o correspondente acréscimo na intensidade de acoplamento vetorial. Na Fig.(4.8) mostramos as mudanças produzidas na localização do ponto crítico em sua coordenada no eixo do potencial químico. Na Fig.(4.9) podemos notar como as coordenadas do ponto crítico variam no eixo da temperatura da temperatura conforme B e G_V variam.

Conforme os valores de B aumentam, a posição do potencial químico recua como esperado pela Catálise Magnética Inversa. Também, com o aumento do campo magnético, a temperatura de localização do ponto crítico se eleva, devido ao reforço na região de primeira ordem.

Por outro lado, conforme a intensidade de acoplamento vetorial aumenta, as coordenadas do ponto crítico no eixo do potencial químico ficam localizadas em valores mais altos. Inversamente, a temperatura de localização do ponto crítico é reduzida até a região de primeira ordem desaparecer totalmente em um dado valor suficiente de G_V . A

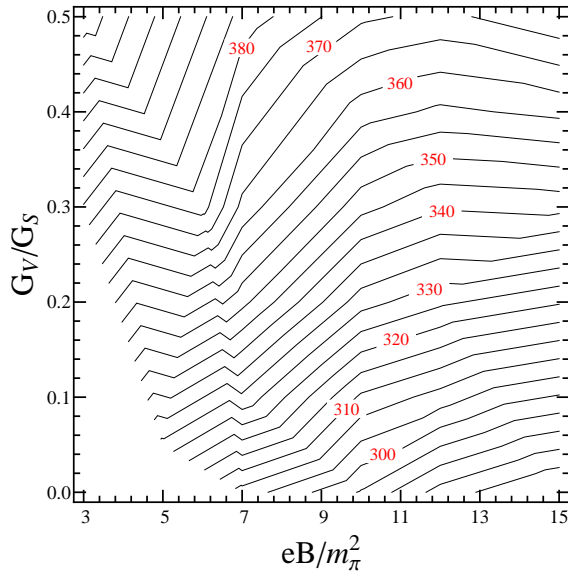


Figura 4.8: Dependência da localização do ponto crítico no eixo do potencial químico em função da variação de B e G_V . Os valores nos contornos representam o potencial químico no ponto crítico. O potencial químico decresce em campos magnéticos mais intensos e aumenta em valores de G_V mais repulsivos.

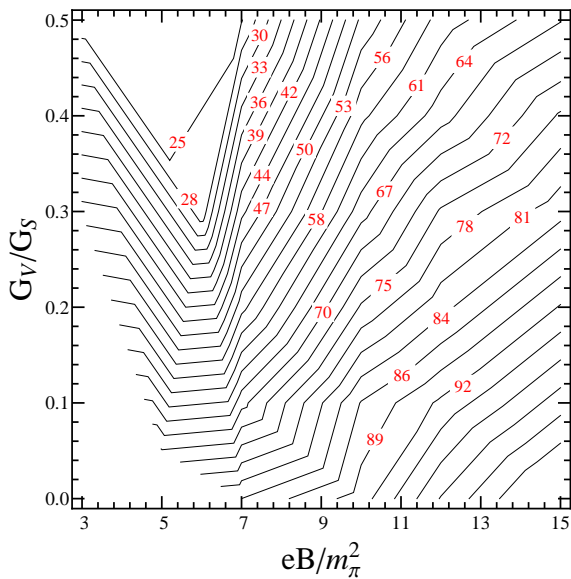


Figura 4.9: Dependência da localização do ponto crítico no eixo da temperatura em função da variação de B e G_V . Os valores nos contornos representam a temperatura no ponto crítico. A coordenada da temperatura aumenta com B maior e diminui com acoplamento G_V decrescente.

partir destes gráficos, o comportamento oposto destes efeitos torna-se mais evidente. Na escala de temperatura ($\mu = 0$), a Catálise Magnética leva o contorno de fase para valores elevados de temperatura conforme a intensidade do campo aumenta, exibindo um claro desacordo com o resultado da rede mostrado em [88]. No outro limite, na escala de potencial químico ($T = 0$), a Catálise Magnética Inversa direciona a região de coexistência para valores mais baixos de μ conforme o campo de fundo B aumenta.

Na Fig.(4.10), mostramos as modificações no diagrama de fases causadas pelos efeitos considerados neste capítulo.

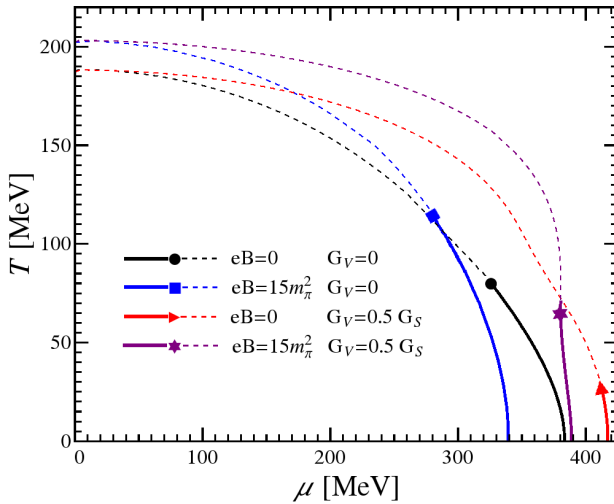


Figura 4.10: Diagramas de fases no plano $T - \mu$ mostrando a influência da interação vetorial em $G_V = 0.5G_S$ e campo magnético de valor $eB = 15 m_\pi^2$.

Em comparação com o caso onde $B = 0$ e $G_V = 0$, a introdução de um campo magnético da ordem de $eB = 15 m_\pi^2$ faz a linha de primeira ordem expandir ao longo do plano $T - \mu$. O ponto crítico alcança valores mais baixos no eixo do potencial químico bem como em todo o contorno de fase. A temperatura pseudo crítica aumenta com o valor do campo magnético devido à Catálise Magnética nessa região.

Estabelecendo somente o efeito do acoplamento vetorial, escolhendo-se o valor de $G_V = 0.5G_S$, observa-se o encolhimento da região de primeira ordem e a elevação nos valores do potencial químico. Entretanto, neste caso, a temperatura pseudo crítica permanece a mesma que no caso $B = 0$ e $G_V = 0$, porque a interação vetorial somente afeta

o diagrama quando $\mu \neq 0$.

Inserindo ambas as contribuições ($eB = 15 m_\pi^2$, $G_V = 0.5 G_S$), reproduzimos uma situação intermediária, quase comparável ao caso sem nenhum dos efeitos ($B = 0$, $G_V = 0$) em valores pequenos de temperatura. Além de $T = 0$, no entanto, a curvatura destes contornos de fase são claramente diferentes, enfatizando deste modo que o caso $B = 0$ e $G_V = 0$ não pode ser restaurado pela introdução dos dois efeitos. Verificamos ainda que este resultado pode ser importante somente em $T = 0$, quando a presença de um campo magnético de fundo poderia reduzir ou mesmo cancelar o efeito repulsivo provocado pela interação vetorial. No interior do núcleo magnetizado de uma estrela compacta, a pressão de saturação seria deslocada para valores mais altos modificando sua relação massa/raio.

Analizando as características do diagrama de fases em um campo magnético mais fraco, $eB = 6 m_\pi^2$, pode-se encontrar quase o mesmo comportamento mostrado antes, onde a primeira diferença que podemos notar está no espaçamento entre as curvas, conforme mostramos na Fig.(4.11).

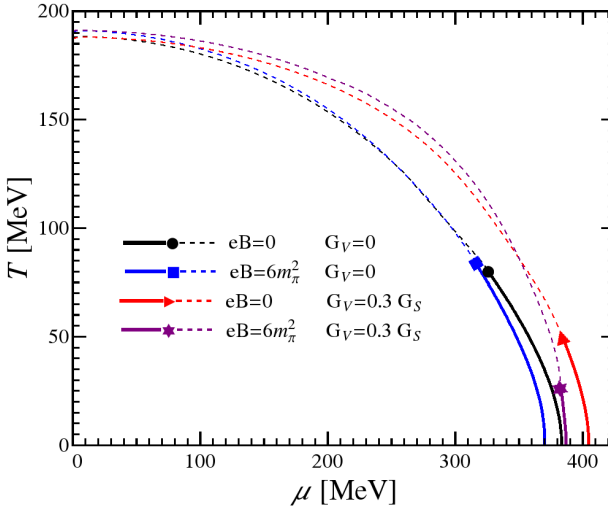


Figura 4.11: Diagramas de fases no plano $T-\mu$ mostrando a influência da interação vetorial em $G_V = 0.3 G_S$ e campo magnético de valor $eB = 6 m_\pi^2$.

Comparando o caso padrão ($B = 0$, $G_V = 0$) com aquele onde o campo magnético é $eB = 6 m_\pi^2$ vemos uma pequena expansão da região de primeira ordem e um pequeno recuo nos valores de μ . A interação

vetorial sozinha, com ($B = 0$, $G_V = 0.3G_S$), apenas o enfraquece a região de primeira ordem e causa um pequeno deslocamento do contorno de fase para valores mais altos de μ .

A principal diferença aparece quando comparamos os casos ($eB = 15m_\pi^2$, $G_V = 0.5G_S$) e ($eB = 6m_\pi^2$, $G_V = 0.3G_S$). No primeiro, a introdução do campo magnético $eB = 15m_\pi^2$ para $G_V = 0.5G_S$ apenas, amplia a linha de fronteira de coexistência. Entretanto, no segundo caso, a influência adicional do campo de valor $eB = 6m_\pi^2$, encolhe a linha de primeira ordem em comparação com a contribuição do acoplamento vetorial $G_V = 0.3G_S$ sozinha. O campo magnético apresenta ambos os efeitos de intensificação e enfraquecimento na transição de primeira ordem, dependendo da intensidade do campo, quando a análise é feita assumindo a existência de uma interação de acoplamento vetorial.

Esta conclusão contrasta com o conhecimento anterior da influência apenas do campo magnético. Esta aparente contradição pode ser explicada considerando o número máximo de níveis de Landau $k_{f,max}$ os quais são necessários para acomodar todos estes estados de férmions. Em um campo suficientemente elevado, todos os estados são definidos pelo nível de Landau mais baixo. Em um campo magnético mais fraco, o número de níveis de Landau necessários cresce como podemos verificar através da Eq.(4.27). Assim, para popular estes níveis adicionais parte da energia disponível no sistema é requerida, restando menos energia para a massa efetiva.

4.6 Diagramas de Fases no Plano $T - \rho_B$

A fase de coexistência de primeira ordem é melhor considerada quando analisamos o diagrama de fases no plano $T - \rho_B$. Na transição de primeira ordem, as duas densidades coexistentes podem ser calculadas determinando a massa efetiva nos mínimos de mesma pressão do potencial termodinâmico. Em uma dada temperatura é possível a coexistência de duas fases diferentes em densidades distintas.

A aplicação de um campo magnético externo de $eB = 15m_\pi^2$ amplia a região de coexistência quando todos os estados estão no LLL (veja Fig.(4.12)). Diferentemente, em um campo mais fraco com $eB = 6m_\pi^2$, esta região é reduzida (veja Fig.(4.13)).

Na Fig.(4.12), com um campo magnético forte, a diferença de densidades $\Delta\rho = \rho^H - \rho^L$ (onde, ρ^H , corresponde a densidade maior e ρ^L é a menor densidade) é maior que no caso $B = 0$, $G_V = 0$ e a condição de coexistência permanece até valores altos de temperatura.

No entanto, com um campo magnético fraco, a diferença na densidade é menor que no caso $B = 0$, $G_V = 0$, como nos mostra a Fig.(4.13). Novamente, este comportamento peculiar pode ser explicado pelo padrão de ocupação dos níveis quantizados de Landau.

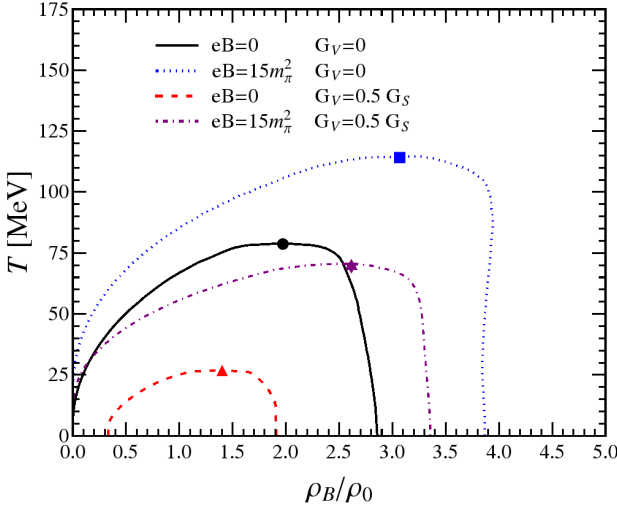


Figura 4.12: Diagrama de fases de primeira ordem no plano $T - \rho_B$ mostrando a influência da interação vetorial em $G_V = 0.5G_S$ e intensidade de campo magnético de $eB = 15 m_\pi^2$

Desde que, em um campo fraco mais energia do sistema é necessária para promover os férmions para níveis de Landau mais altos. Em um campo suficientemente forte, isto não ocorre porque todos os estados fermiônicos estão no nível mais baixo (LLL).

Ao considerar apenas a influência da interação vetorial, percebemos que a região de coexistência encolhe na escala de temperatura para ambos os valores de acoplamento. Dependendo da intensidade do campo magnético a influência do acoplamento vetorial é diferente. Em um campo elevado a região de coexistência é reduzida em comparação com o caso $eB = 15 m_\pi^2$, $G_V = 0$, mas o campo ainda é forte o suficiente para manter a diferença $\Delta\rho$ maior do que o caso $B = 0$, $G_V = 0$. Em contraste, quando o valor do campo é menor, $eB = 6 m_\pi^2$, o efeito da interação vetorial é mais pronunciado e a região de coexistência torna-se muito menor que no caso $B = 0$, $G_V = 0$.

Outra característica a considerar é o efeito do campo magnético em valores não nulos de temperatura. Enquanto os valores de densidade

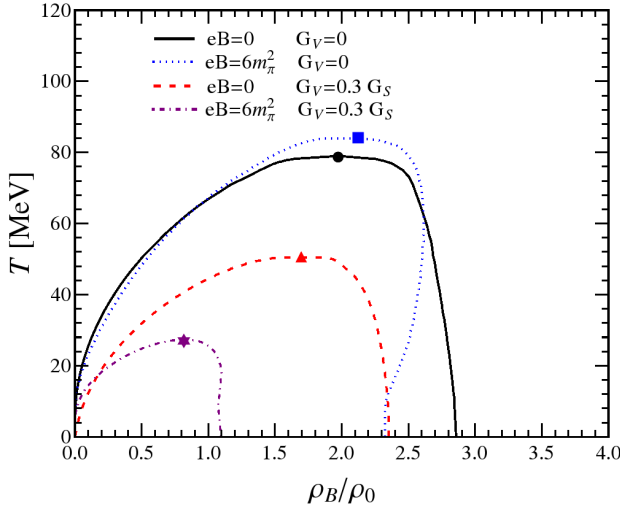


Figura 4.13: Diagrama de fases de primeira ordem no plano $T - \rho_B$ mostrando a influência da interação vetorial em $G_V = 0.3G_S$ e intensidade de campo magnético de $eB = 6m_\pi^2$

menor são menos modificados de um caso para outro, a densidade mais alta aumenta a partir de seu valor em $T = 0$ quando a temperatura se eleva. Esta propriedade é mais evidente para o campo mais fraco, $eB = 6m_\pi^2$, do que para a intensidade, $eB = 15m_\pi^2$. Conforme insere-se o canal de acoplamento vetorial, a densidade mais alta torna-se quase constante com o incremento na temperatura.

4.7 Oscilações de De Haas-van Alphen na Densidade

Em temperatura nula a densidade da matéria de quarks pode ser calculada pela Eq.(4.29). Aumentando-se o campo magnético externo, obtém-se as oscilações quase periódicas nos valores de densidade como mostrado na Fig.(4.14)

Tal comportamento oscilatório representa uma clara manifestação do efeito de De Haas-van Alphen [95] para a matéria fermiônica sujeita a um campo magnético externo. De fato, podemos assinalar seu caráter puramente quântico devido ao evidente desacordo com o teorema de Bohr-van Leeuwen [96, 97]. Este teorema estabelece que classicamente,

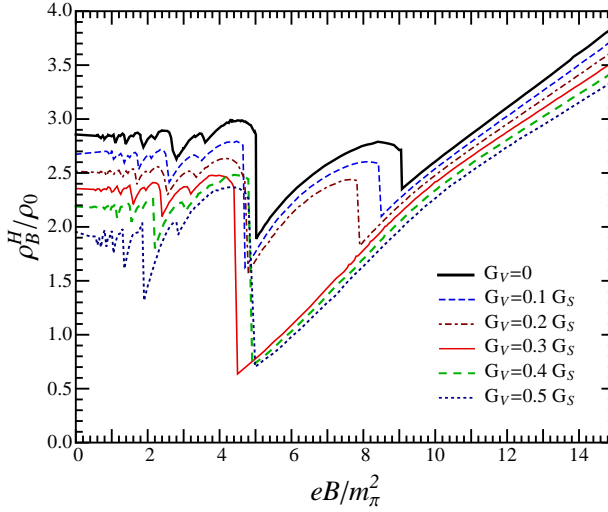


Figura 4.14: Oscilações na densidade mais alta da matéria hadrônica inerentes ao efeito de de Haas-van Alphen conforme a intensidade do campo magnético se eleva. Com o incremento no acoplamento vetorial verificamos um decréscimo global nos valores de densidade.

nenhuma propriedade de um dado sistema em equilíbrio térmico deve depender da intensidade do campo magnético. Como o campo magnético não realiza trabalho sobre cargas elétricas em movimento, a energia do sistema permanece inalterada quando o campo é variado. O gráfico anterior mostra que a densidade depende fortemente da intensidade do campo magnético, com um comportamento assintótico linear em valores mais elevados do campo. Em valores menores de intensidade do campo, a densidade oscila ao redor de um valor quase constante. Pode ser observada uma estrutura de dois picos a qual repete-se quase periodicamente nos valores de B . Como podemos notar, a interação vetorial modifica pouco o comportamento das curvas. Quando o acoplamento vetorial aumenta a mudança mais visível ocorre no decréscimo global nos valores da densidade. As oscilações são menos influenciadas pelo aumento de G_V e podemos apenas verificar um pequeno deslocamento das oscilações de de Haas-van Alphen para valores menores de B .

Este padrão oscilatório foi observado previamente por Preis et al [80] empregando o modelo de NJL para um sabor não massivo (veja a Fig.(4.15)). Neste trabalho também verificou-se a ausência

destas oscilações quando o mesmo cálculo foi realizado utilizando o modelo holográfico de Sakai-Sugimoto. Resultados semelhantes foram originalmente observados na Ref.[98] em $G_V = 0$ para dois sabores de quark e $m \neq 0$.

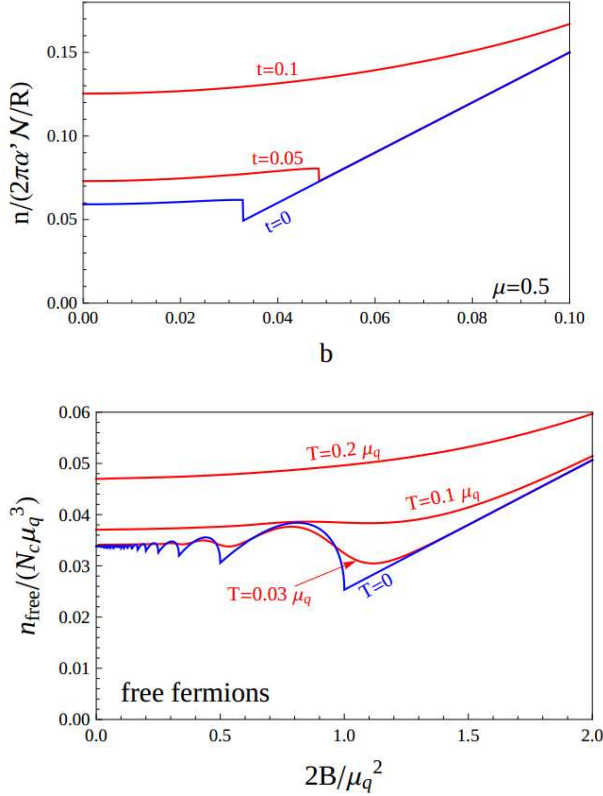


Figura 4.15: Resultados obtidos por Preis et al [80] usando o modelo de Sakai-Sugimoto (Painel superior) e o modelo de NJL (Painel inferior) para um sabor de quark. As oscilações na densidade estão presentes somente no cálculo de NJL, enquanto o cálculo baseado na holografia não é sensível a este efeito.

O comportamento periódico destas variações é melhor visto quando construímos o gráfico da densidade em função do recíproco do campo magnético $1/B$. Historicamente, a teoria de Landau do diamagnetismo [81] já previa a condição oscilatória, a qual foi verificada experimentalmente por de Haas e van-Alphen [95]. A explicação correta

a respeito do padrão periódico foi dada por Onsager [99] em termos da quantização de Bohr-Sommerfeld para as órbitas descritas. De acordo com Onsager⁵, a periodicidade $1/B$ das variações pode ser relacionada a área S da órbita extremal na superfície de Fermi avaliada na direção do campo magnético segundo a expressão

$$\Delta \left(\frac{1}{B} \right) = \frac{2\pi q}{\hbar c} \frac{1}{S}. \quad (4.32)$$

Na Fig.(4.16) são mostradas as oscilações de de Haas-van Alphen na densidade em função do recíproco do campo magnético $1/B$. Pode-se notar um padrão regular de dois picos o qual repete-se periodicamente quando o campo varia. A influência do acoplamento vetorial é pequena nas oscilações magnéticas e observamos um pequeno aumento no espaçamento entre os picos a medida que G_V fica mais forte. Em termos da fórmula de Onsager, isto significa que um aumento no acoplamento vetorial reduz a área das órbitas extremas na superfície de Fermi. O dois picos devem-se a diferença de carga elétrica absoluta existente entre os quarks up e down.

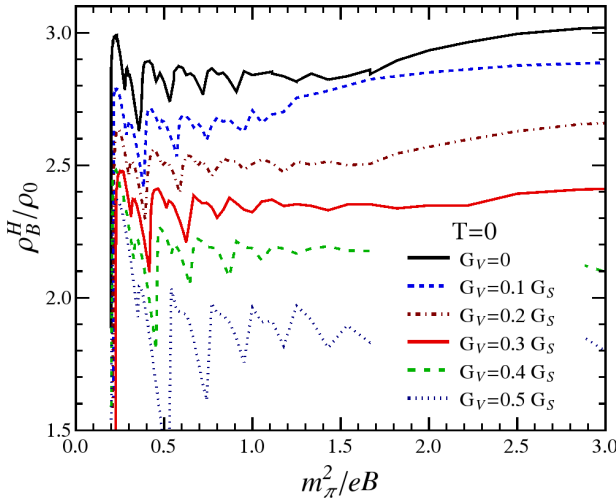


Figura 4.16: Oscilações de De Haas-van Alphen na densidade como função do inverso do campo magnético para alguns valores de acoplamento G_V .

⁵ Na verdade, a definição original envolve o recíproco da intensidade do campo magnético $1/H$ em vez de $1/B$. Para nossos propósitos aqui, eles serão considerados iguais.

4.8 Considerações Finais

Determinamos com a discussão deste capítulo como o campo magnético modifica as propriedades da matéria de quarks e qual seu efeito sobre a restauração da simetria quiral. Reproduzimos os principais resultados referentes ao fenômeno da catálise magnética e observamos que a interação vetorial pode diminuir o efeito da catálise magnética inversa na quebra de simetria quiral. Enquanto a ação do campo externo tende a intensificar a linha de primeira ordem no diagrama de fases e também favorecer a restauração da simetria quiral, a repulsão vetorial deve enfraquecer a linha de coexistência e favorecer a fase quebrada. A conjugação de ambos os efeitos resulta em uma condição intermediária no diagrama de fases e como veremos no próximo capítulo pode originar propriedades interessantes.

Além disso, comprovamos a existência das oscilações de De Haas-van Alphen na densidade da matéria de quarks e estudamos o efeito da interação repulsiva neste contexto. Estas oscilações na densidade têm influência direta na tensão superficial, γ_T , existente na interface de separação das fases hadrônica e de quarks. Como a tensão superficial é dada basicamente pela diferença entre as densidades maior e menor [100], ou seja, $\gamma_T \sim \Delta\rho$, as oscilações induzidas pelo campo magnético também refletem-se sobre esta grandeza, como verificado na Ref. [101]. Um valor pequeno na tensão superficial deve afetar decisivamente o mecanismo de nucleação na estrutura de objetos estelares compactos e dessa forma favorecer a formação das chamadas estrelas híbridas.

No próximo capítulo, vamos mostrar como a ação conjugada do campo magnético e da repulsão vetorial deve resultar em um desdobramento de fases e em fases múltiplas.

Capítulo 5

Desdobramento de Fases Magnéticas Múltiplas na Matéria de Quarks

Neste capítulo, vamos explorar a estrutura de fases da matéria de quarks magnetizada e também como a introdução de um acoplamento vetorial repulsivo no modelo NJL $SU(2)$ pode afetar sua configuração. Como observamos no capítulo anterior, as características principais da transição de primeira ordem da QCD sofrem pouca modificação em baixas temperaturas na presença de um campo magnético forte. Basicamente, o campo externo apenas modifica o valor das massas e potenciais químicos na restauração da simetria quiral. Entretanto, a repulsão entre os quarks proveniente de uma interação vetorial repulsiva pode modificar a arquitetura dos níveis de Landau e estabelecer um padrão exótico em sua estrutura de fases magnetizadas.

A introdução do campo magnético provoca o aparecimento de vários mínimos alguns locais e outros globais no potencial termodinâmico. Em geral, observa-se apenas a coexistência simultânea de dois mínimos globais de cada vez numa transição de primeira ordem. A atuação dos efeitos opostos do acoplamento vetorial e do campo magnético deve alterar este padrão de mínimos. Quando o termo ve-

torial repulsivo está presente, a estrutura de mínimos no potencial termodinâmico modifica-se e podemos nos perguntar: Para um campo magnético fixo, é possível achar um valor particular G_V para o qual tenhamos a coexistência de mais de dois mínimos globais por vez? A repulsão vetorial introduzida aqui assemelha-se à parte repulsiva do potencial de Lennard-Jones da física atômica. Tal interação molecular pode proporcionar para algumas substâncias propriedades interessantes no diagrama de fases. O diagrama de fases da água, por exemplo, é bastante rico e apresenta diversas peculiaridades, como um ponto triplo, dilatação anômala, fases cristalinas, etc. Como veremos, com a consideração do termo repulsivo no modelo de NJL para a matéria de quarks magnetizada abre-se a possibilidade de aparecimento de múltiplas fases coexistentes. Os principais resultados deste capítulo serão submetidos à publicação em breve.

5.1 Introdução

No contexto da física da matéria condensada, normalmente há a consideração de sistemas fermiônicos de baixa energia em potencial químico finito. Em particular, o estudo da resposta destes sistemas a campos elétricos e magnéticos tem nos revelado fenômenos surpreendentes. Quando os campos eletromagnéticos são muito intensos os efeitos não lineares tornam-se importantes devido à criação de pares. O limite de Schwinger estabelece os valores críticos para o campo elétrico, E_{cr} , e magnético, B_{cr} , acima dos quais isso ocorre

$$E_{cr} = \frac{m^2 c^3}{q \hbar} \quad , \quad B_{cr} = \frac{E_{cr}}{c} . \quad (5.1)$$

Podemos estimar estes limites na QCD usando a massa dos quarks e encontramos campos da ordem de $E_{cr} \approx 2 \times 10^{20}$ V/m e $B_{cr} \approx 6.3 \times 10^{15}$ G. Em energias mais altas, a formulação da QED para sistemas densos de férmions sujeitos a campos de radiação nos oferece as ferramentas não perturbativas básicas que podem ser aplicadas similarmente a problemas da QCD. Espera-se que tais campos magnéticos intensos estejam presentes tanto nas colisões de íons pesados [75, 102, 76], quanto nos núcleos centrais de estrelas compactas [103, 104]. O modo pelo qual um campo magnético intenso age sobre a matéria de quarks pode influenciar significativamente tanto a observação experimental da estrutura de fases prevista para a QCD, bem como na definição das características limítrofes dos objetos estelares que possuem tal composição.

Como visto no capítulo anterior, a consideração de um campo magnético externo introduz um padrão oscilatório na maioria das quantidades termodinâmicas, inclusive as massas dos quarks que são geradas dinamicamente. Como visto, esta última propriedade manifesta-se por meio do fenômeno da catálise magnética [105, 106, 107, 108, 109], onde o campo magnético induz um aumento no condensado quark-antiquark conforme torna-se mais intenso. O movimento dos quarks eletricamente carregados sob a ação de B fica limitado a órbitas circulares cuja frequência de ciclotron multiplicada por um múltiplo inteiro da constante de Planck (\hbar) define os níveis de energia discretos destes orbitais quantizados. Tal quantização de Landau restringe o movimento dos mesmos ao plano perpendicular ao campo magnético. Para férmions de spin $1/2$, como os quarks, esta quantização planar está relacionada a uma redução dimensional das dimensões espaciais as quais tornam-se compactadas. No caso da QCD, a restrição planar catalisa o emparelhamento dos condensados quark-antiquark, os quais ganham massa quebrando assim o estado de vácuo quiralmente simétrico.

Entretanto, em densidade finita, o cenário da catálise magnética torna-se diferente, e o aumento no condensado quiral sob a influência do campo externo não se aplica do mesmo modo. A restrição quântica imposta pelo princípio da exclusão de Pauli determina que para adicionar novas partículas ao sistema, há a necessidade de pagar uma significativa parte da energia disponível para aumentar o potencial químico do sistema. Assim, a energia total do sistema deve ser compartilhada entre o potencial químico, os estados magnetizados de Landau e a massa efetiva dos quarks. O uso de modelos efetivos em potencial químico finito mostra que a presença do campo magnético B induz a quebra de simetria quiral para valores inferiores de potencial químico de coexistência (onde ocorre a transição de primeira ordem) comparativamente ao caso $B = 0$. Como explicado, na matéria densa de quarks, o campo magnético favorece a restauração da simetria quiral por meio da catálise magnética inversa. Em potencial químico finito, além do ganho de energia no condensado quiral provocado pelo campo aplicado, também há o custo em energia livre para formar estes pares acoplados adicionais aumenta. Uma rica estrutura de fases emerge a partir da presença do campo magnético e suas características dependem fortemente da parametrização adotada no modelo como cuidadosamente verificou-se nos trabalhos [110, 111].

Aqui, nossa análise inclui o termo de acoplamento vetorial, já introduzido nos capítulos anteriores, na lagrangiana $SU(2)$ de NJL. Como anteriormente, estudaremos o comportamento da matéria densa

de quarks sob a ação de um campo magnético externo dentro do formalismo dado pela aproximação de campo médio. O efeito saturante na matéria nuclear provocado pela existência do meio denso é simulado pela inserção do acoplamento vetorial repulsivo entre os quarks. Como verificamos em nossa análise anterior [112], o acoplamento vetorial modifica os efeitos magnéticos principalmente nas baixas temperaturas e exerce uma influência aproximadamente oposta a B no diagrama de fases da QCD. Enquanto o aumento na intensidade do campo magnético leva a transição de primeira ordem para valores menores de potencial químico de coexistência, ao estabelecer uma contribuição não nula para o acoplamento vetorial produz-se o efeito inverso como já observamos. Tal característica foi também estudada no caso SU(3) [113], onde este comportamento é melhor traduzido em um “amolecimento” (*softening*) na equação de estado devido ao campo magnético e seu “endurecimento” (*hardening*) pela repulsão vetorial. Como veremos nas próximas seções, o acoplamento vetorial torna-se responsável por outros mecanismos interessantes ocorrendo na restauração da simetria quiral no caso SU(2). Tal termo pode estabilizar fases de densidades magnéticas intermediárias, que normalmente não são vistas sem a sua consideração. Além disso, este fato abre a possibilidade de coexistência de múltiplas fases diferentes (três ou quatro, como veremos adiante) em baixas temperaturas além da coexistência ordinária de duas densidades distintas. Este desdobramento em múltiplas fases deve ocorrer somente para uma escolha particular dos valores de intensidade de campo e acoplamento vetorial. A seguir, vamos usar a expressão para a energia livre obtida no capítulo anterior. Resolvendo-se numericamente as equações do *gap* Eqs.(4.28) podemos discutir este desdobramento das fases magnéticas para os casos de duas ou mais fases. Ao final deste capítulo, vamos avaliar quais as condições paramétricas de B e G_V que determinam o aparecimento destes fenômenos no sistema de quarks.

5.2 Soluções da Equação de Gap para Sistemas de Duas Fases

Para realizar o cálculo numérico do potencial termodinâmico, Eq.(4.12), e a determinação de seus pontos estacionários M e $\tilde{\mu}$ por meio das equações acopladas, Eqs.(4.21),(4.28), iniciamos escolhendo um conjunto de parâmetros padrão, como já explicado no Capítulo 2. Neste capítulo, usaremos o mesmo conjunto de parâmetros usado no capítulo anterior $\Lambda = 590$ MeV, $G_S \Lambda^2 = 2.435$ and $m = 6.0$ MeV.

Como dito antes, só a presença do campo magnético causa um comportamento oscilatório da maior parte dos observáveis físicos, sendo a frequência destas oscilações uma função da intensidade B [114, 115]. Para certos valores específicos dos parâmetros B e G_V podemos observar a ocorrência simultânea de múltiplos mínimos na mesma pressão. Este comportamento é válido pelo menos em temperaturas próximas a zero. Na Fig.(5.1) mostramos o perfil do potencial termodinâmico calculado para alguns valores de potencial químico em $T = 0$.

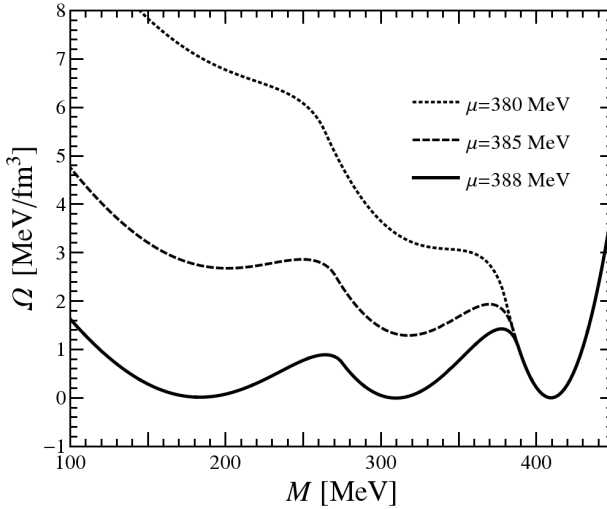


Figura 5.1: Evolução da forma do potencial termodinâmico em $T = 0$, $eB = 5.1 m_\pi^2$ e $G_V = 0.2G_S$ para alguns valores de potencial químico. Podemos verificar que existe a possibilidade de coexistência múltipla para alguns valores específicos dos parâmetros de controle B e G_V .

Pode-se perceber que inicialmente ocorre o aparecimento de pontos de inflexão os quais evoluem para estados metaestáveis. Em um determinado valor crítico de μ é possível a ocorrência de três estados de densidades distintas coexistindo na mesma pressão. Observa-se também que o mínimo relativo a menor densidade ($M \sim 410$ MeV) praticamente permanece imóvel e as alterações sucedem-se apenas com os outros dois mínimos. Além da ocorrência de três mínimos globais concorrentes, também podemos encontrar outras combinações paramétricas que nos conduzem à condição de coexistência de até quatro mínimos. Na Fig. (5.2) apresentamos um desses casos.

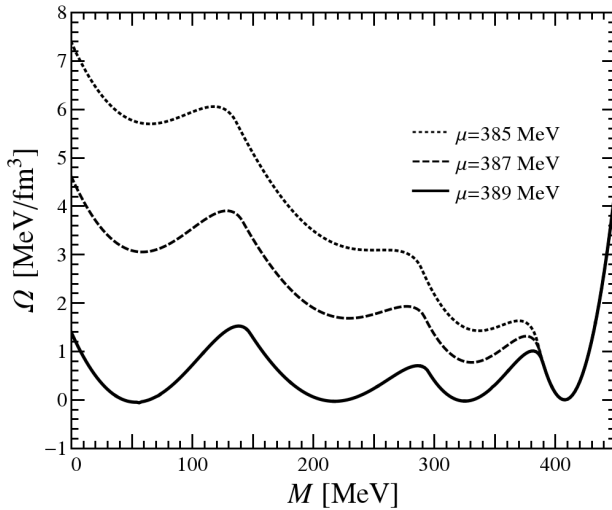


Figura 5.2: Modificação do perfil do potencial termodinâmico em temperatura nula $T = 0$, para o campo $eB = 4.56 m_\pi^2$ e acoplamento vetorial $G_V = 0.139 G_S$ para alguns valores de potencial químico. Percebemos que pelo menos na temperatura nula é possível a coexistência de quatro mínimos degenerados.

Variando o potencial químico para um dado valor de campo magnético, B , e acoplamento vetorial, G_V , podemos registrar as posições de todos os mínimos e máximos do potencial termodinâmico e obter a dependência da massa efetiva que caracteriza a transição de primeira ordem. Para investigar a maneira pela qual a coexistência é afetada pela alteração nestes parâmetros construímos os gráficos mostrados nas figuras Fig.(5.3) e Fig.(5.4). Acompanhando o efeito provocado pelo campo magnético na transição de primeira ordem concluímos que a diminuição de sua intensidade provoca um aumento na quantidade de oscilações presentes no gráfico da massa efetiva como pode ser visto na Fig.(5.3). Por outro lado, quando aumentamos o acoplamento vetorial G_V mantendo o campo magnético fixo, verificamos que a parte inferior do padrão de oscilações inclina-se em direção a valores mais altos de potencial químico. Assim, o efeito conjugado do campo magnético e da interação vetorial sob determinadas condições pode favorecer o aparecimento da coexistência múltipla como observamos.

Em campos magnéticos relativamente fracos, observamos muitas oscilações para os valores das massas dos quarks, mas o sistema ignora

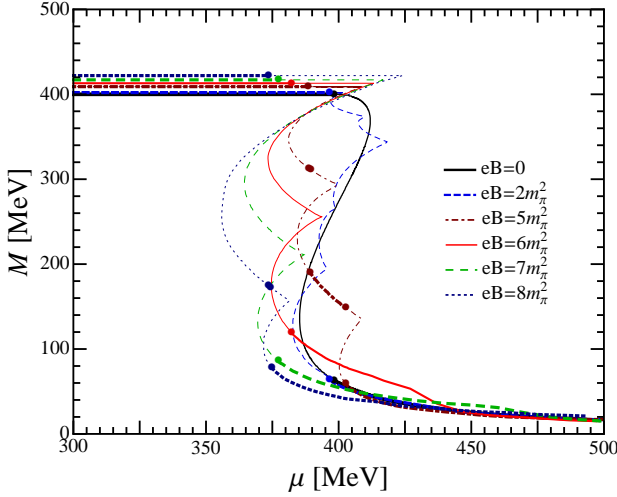


Figura 5.3: Dependência da massa efetiva dos quarks em função do potencial químico para alguns valores de campo magnético para $G_V = 0.2G_S$. Com a redução na intensidade do campo, percebemos que a quantidade de oscilações aumenta de acordo com o preenchimento dos níveis de Landau.

os estados instáveis de massa intermediários e “salta” diretamente do estado de massa mais alta (menor densidade ρ_L) para o estado de menor massa (maior densidade ρ_H) no valor de coexistência do potencial químico. Quando o campo torna-se mais forte, a quantidade de oscilações na massa efetiva dos quarks é reduzida, no entanto, estes estados intermediários permanecem instáveis como antes, e nenhum efeito magnético é observado além da catálise magnética inversa. Estes estados de densidade intermediária induzidos pelo campo magnético não podem representar estados de equilíbrio visto que carecem de estabilidade mecânica e/ou termodinâmica. O critério de estabilidade termodinâmica (Gibbs-Duhem) estabelece que o estado de equilíbrio ocorre quando a energia livre é um extremo mínimo $\delta\Omega = 0$. Quando um sistema apresenta estabilidade mecânica isso significa que tem uma pressão não negativa $(\partial P/\partial\rho)_S \geq 0$, ou equivalentemente, $(\partial M/\partial\mu)_T \leq 0$. Tal sistema mecanicamente instável tentaria hipoteticamente comprimir a si mesmo.

A inserção de um acoplamento vetorial repulsivo G_V entre os quarks pode fornecer estabilidade ao sistema e ocasionalmente promove estados magnéticos de densidade intermediária para a situação estável. Como o acoplamento repulsivo desloca o potencial químico ordinário

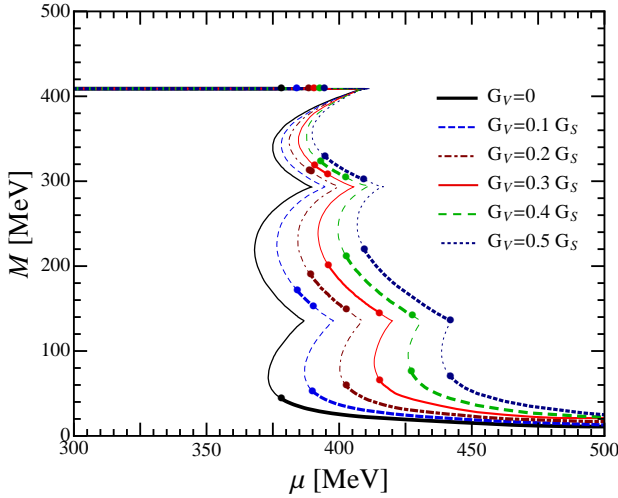


Figura 5.4: Dependência da massa efetiva dos quarks em função do potencial químico para alguns valores de acoplamento vetorial para $eB = 5 m_\pi^2$. Conforme o valor de G_V aumenta ocorre a inclinação do gráfico na região de transição.

de μ para seu valor efetivo $\tilde{\mu} = \mu - 2G_V\rho$, ambos os critérios de estabilidade discutidos podem eventualmente ser alcançados por meio de tal redefinição inserida nas condições acima. Escolhendo-se uma magnitude suficientemente repulsiva para G_V , é possível que os estados de quarks assumam densidades diferentes e a restauração da simetria quiral aconteça por meio de mais de uma linha de transição de primeira ordem em cascata. Para cada valor do campo magnético B existe um valor crítico limítrofe G_V^c para o acoplamento vetorial acima do qual os estados intermediários tornam-se estáveis. Sob um campo magnético de $eB = 5 m_\pi^2$, este limiar situa-se perto de $G_V^c \sim 0.2G_S$ onde o primeiro salto na massa começa a aparecer ¹. Cada um destes estados intermediários pode ser associado com o respectivo estado (k_u, k_d) de magnetização da Landau.

Na Fig.(5.5) mostramos os diagramas de fases para o caso de uma intensidade de campo $eB = 5.1 m_\pi^2$ e magnitude de acoplamento vetorial $G_V = 0.3 G_S$ (acima do valor crítico G_V^c) comparativamente ao caso $G_V = 0$. Prontamente, observa-se o desdobramento do caso

¹Há um outro valor de acoplamento vetorial crítico G_V^c relativo ao limiar de insurgência do segundo salto na massa (ver Fig.(5.4)) em $eB = 5 m_\pi^2$ e situa-se no intervalo $0 < G_V < 0.1$ com valor próximo a zero como veremos na sequência.

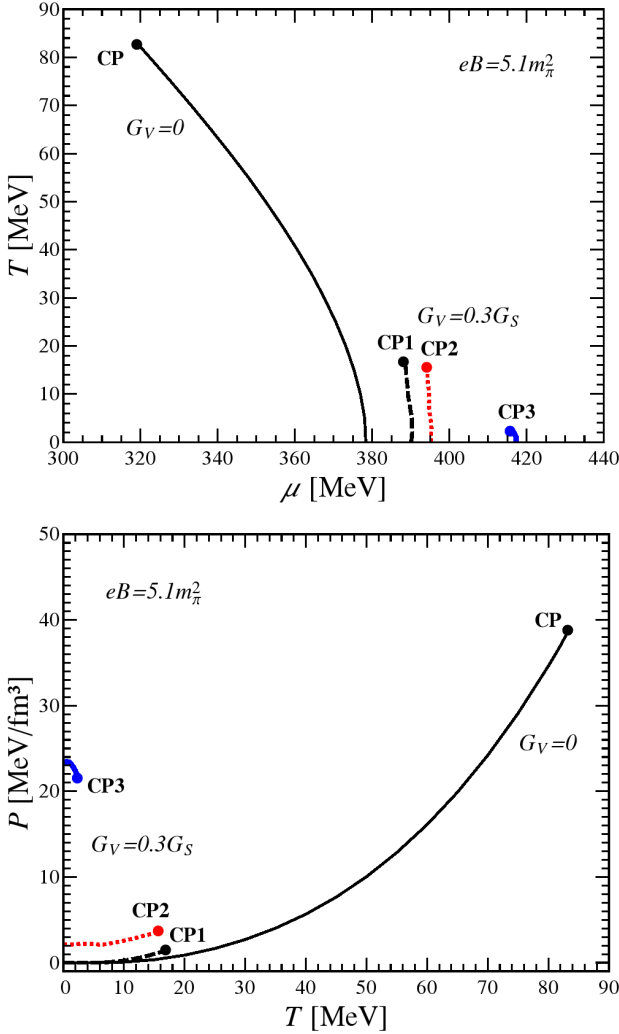


Figura 5.5: Diagramas de fases para a matéria de quarks no plano $T - \mu$ (Painel Esquerdo) e no plano $T - P$ (Painel Direito) sob uma magnitude de campo $eB = 5.1m_\pi^2$ e acoplamento vetorial de $G_V = 0.3G_S$. Em ambas as figuras, a linha contínua fina representa o caso onde $G_V = 0$ na mesma intensidade de campo para comparação. Ao estabelecer o acoplamento $G_V = 0.3G_S$, verificamos o desdobramento em três novas linhas de coexistência caracterizadas pelos pontos críticos **CP1**, **CP2** e **CP3**.

$G_V = 0$ em três pares de novas fases coexistentes quando fazemos $G_V = 0.3 G_S$. A transição relativa a cada um destes pares de fases é caracterizada por uma linha de primeira ordem entre duas densidades (sistema dual). As fases densas (ρ_L, ρ_H) em cada par compartilham a mesma pressão, mas os pares em si não ocorrem simultaneamente no mesmo valor de pressão. Como mostrado na Fig.(5.5), as três linhas de primeira ordem independentes definem também três pontos críticos $CP1$, $CP2$ e $CP3$ no plano $T - \mu$ (ou $P - T$).

Devemos ressaltar que este desdobramento de fases magnéticas que aparece na Fig.(5.5) foi previsto por Klimenko et al. [105, 109] em $T = 0$ apenas. Posteriormente, tal estudo foi realizado com mais rigor em $T = 0$ por Scoccola et al. no modelo NJL SU(2) [110] e NJL SU(3) [111]. A restrição de investigação do problema neste limite de temperatura nula leva a uma perda significativa de informação a respeito do diagrama de fases. Neste trabalho demonstramos que existem outras características importantes que emergem da análise em temperatura finita como será visto na sequência.

A pressão em um sistema magnetizado torna-se anisotrópica porque a redução dimensional restringe o problema tridimensional a uma situação planar. Por sua vez, a densidade de energia ε do sistema magnetizado necessita acolher a energia associada com a magnetização induzida pela aplicação do campo ². Como a densidade de energia é uma função de estado do sistema, em volume constante, os estados de equilíbrio são determinados unicamente por seus valores. Sob campo magnético constante a equação de Clausius-Clayperon ainda é válida (ver Apêndice F) como expressa usualmente

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{\Delta S}{\Delta V} , \quad (5.2)$$

onde a inclinação positiva $\partial P/\partial T$ no gráfico direito da Fig.(5.5) está relacionada à razão entre a entropia ΔS e o volume ΔV no sistema fermiônico. A transição que ocorre na pressão mais alta esta associada com a transição entre os níveis de Landau $k_d = 1 \rightarrow 2$ (linha azul na Fig.(5.5)) e é caracterizada por uma inclinação negativa $\partial P/\partial T$. Isto significa que a razão $\Delta S/\Delta V$ também é negativa o que nos mostra um comportamento semelhante ao que acontece no diagrama de fases da água na transição líquido-sólido que conduz a sua dilatação anômala. Acreditamos que a linha azul na Fig.(5.5) está relacionada com um tipo de transição cristalina entre fases magnetizadas. Em valores de

²Neste capítulo não calculamos explicitamente a magnetização, isso será feito no próximo capítulo. Aqui nos referimos a magnetização apenas em caráter qualitativo.

pressão menores, verifica-se que as transições $k_d = 0 \rightarrow 0$ (linha preta na Fig.(5.5)) e $k_d = 0 \rightarrow 1$ (linha vermelha na Fig.(5.5)) exibem o comportamento oposto. Na Fig.(5.6) à seguir, são mostrados os diagramas de fases correspondentes no plano $T - \rho_B$ e as isotermas de Andrews que definem a equação de estado. Do diagrama $\rho - T$ é evidente agora que as linhas de coexistência na Fig.(5.5) referem-se à coexistência dual (duas fases apenas por linha de primeira ordem) de fases ocorrendo em pressões distintas.

O aumento do acoplamento vetorial promove estados instáveis de massa para a condição de estabilidade. Além disso, a restauração da simetria quiral deve ocorrer por meio de transições de primeira ordem sucessivas entre diferentes fases magnetizadas. A distinção entre estas fases magnetizadas reside nos diferentes esquemas de preenchimento dos níveis de Landau. O nível máximo de Landau de acordo com a equação Eq. (4.27) está relacionado à menor carga elétrica transportada pelo quark down e a cascata entre os estados refere-se às transições $k_d = 0 \rightarrow 0, 0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 2$, respectivamente. Em geral, estes saltos adjacentes nos estados de Landau ocorrem via transições de primeira ordem não simultâneas o que dá origem a um desdobramento em fases múltiplas. À cada salto, nós podemos associar a coexistência de duas fases distintas prevalecendo na mesma pressão e a diferença aparece em suas densidades (veja Fig.(5.7)). Na primeira transição, o nível de Landau não muda, mas o aumento no potencial químico será equilibrado por um aumento na massa dos quarks e tal fato modifica a densidade à medida que a nova fase começa a se formar. Para alguns valores particulares do parâmetro G_V , com campo aplicado B fixo, pode-se observar mais de duas densidades distintas aparecendo como fases múltiplas de três ou mesmo quatro densidades coexistentes.

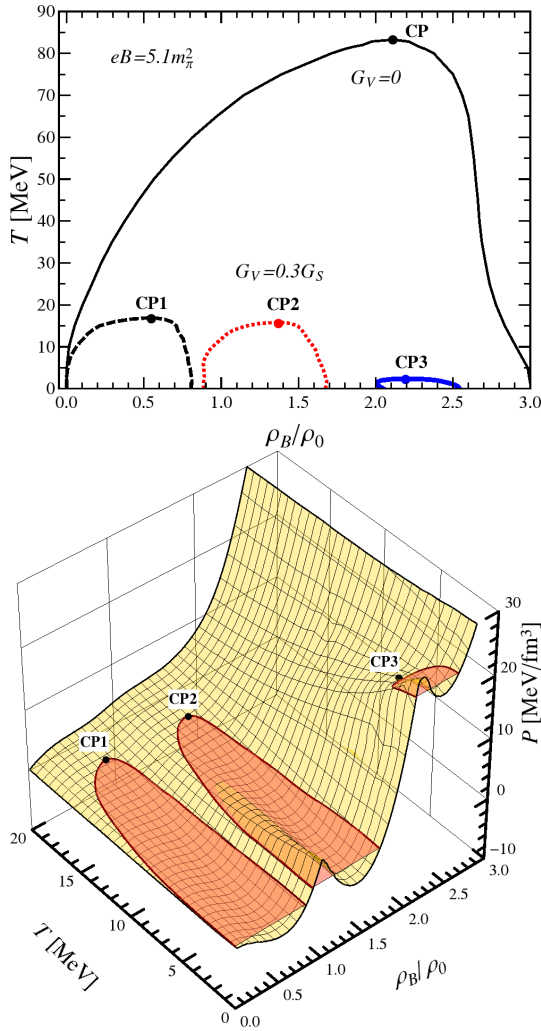


Figura 5.6: Pannel Esquerdo: Diagrama de fases associado a uma intensidade de campo magnético $eB = 5.1m_\pi^2$ e magnitude de acoplamento vetorial de $G_V = 0.3G_S$ como visto no plano $T - \rho_B$. Novamente, o caso $G_V = 0$ (linha contínua fina) é mostrado para efeito de comparação. Percebe-se o desdobramento em três ramos de coexistência caracterizadas pelos pontos críticos $CP1$, $CP2$ e $CP3$. Pannel Direito: O diagrama $T - \rho_B - P$ construído para os mesmos valores de campo B e acoplamento vetorial G_V . Em ambos os diagramas é possível distinguir três transições de fases de primeira ordem. Cada transição é definida pela coexistência de duas densidades distintas na mesma pressão.

5.3 Soluções das Equações de Gap para Sistemas Trifásicos e Quadrifásicos

Um novo aspecto interessante pode ser investigado se ajustarmos a magnitude do acoplamento vetorial mantendo fixo o campo magnético. No valor limítrofe G_V^c , quando os estados intermediários começam a aparecer (ou seja, tornam-se estáveis), é possível observar múltiplas fases magnéticas coincidentes. Por exemplo, para uma intensidade de campo de $eB = 5.1 m_\pi^2$, o limiar de acoplamento vetorial é $G_V = 0.2 G_S$, como pode ser determinado de maneira aproximada pela inspeção do gráfico da Fig.(5.4) para um campo um pouco menor. Como ficará evidente depois, respectivamente à estes valores específicos de B e G_V observamos a ocorrência de três mínimos globais no potencial termodinâmico. Estes mínimos estão relacionados às três soluções não triviais possíveis para as equações do *gap* para um dado valor de potencial químico. Ou, em outras palavras, no limiar G_V^c onde três fases diferentes ou densidades podem coexistir simultaneamente na mesma pressão.

Acreditamos que esta possibilidade nunca foi observada antes e deve-se principalmente à modificação da estrutura energética dos níveis de Landau provocada pela inserção do acoplamento vetorial.

Perto do valor crítico para o acoplamento vetorial $G_V^c = 0.2 G_S$, os diagramas de fases mostrados nas Figs.(5.5,5.6) assumem aspectos peculiares e para entender melhor o que está acontecendo nestas condições, é útil acompanhar as respectivas mudanças no potencial termodinâmico conforme a temperatura cresce. Na Fig.(5.7), apresentamos alguns perfis do potencial termodinâmico avaliados em $eB = 5.1 m_\pi^2$ e $G_V = 0.2 G_S$ para diferentes temperaturas. Em particular, em $T = 0$, observam-se três mínimos globais coincidentes que ocorrem na mesma pressão nula e potencial químico, $\mu_{TP1} = 388.05 \text{ MeV}$, do primeiro ponto triplo.

Aumentando-se a temperatura para $T = 10 \text{ MeV}$, esta coexistência tripla no mesmo potencial químico não sobrevive mais e observa-se sua dissociação em duas transições de primeira ordem separadas que ocorrem em potenciais químicos distintos $\mu_{Ia} = 387.00 \text{ MeV}$ (linha preta com tracejado maior) e $\mu_{Ib} = 387.65 \text{ MeV}$ (linha vermelha com tracejado menor), respectivamente. Em uma temperatura mais alta, próximo à $T = 21.4 \text{ MeV}$, dois mínimos se fundem e assim podemos atribuir um outro ponto triplo nesta temperatura. Acima desta temperatura, vemos o comportamento de uma transição de primeira ordem ordinária, a qual evolui para um ponto crítico na temperatura

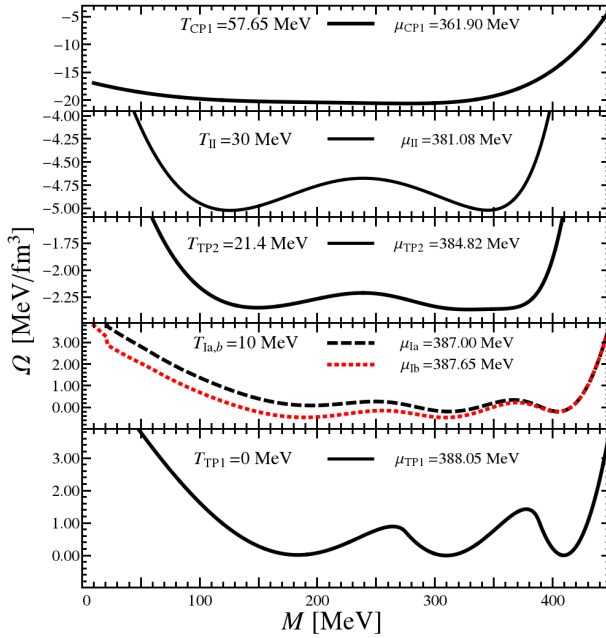


Figura 5.7: Coexistência de mínimos globais do potencial termodinâmico para algumas temperaturas selecionadas e potencial químico menor.

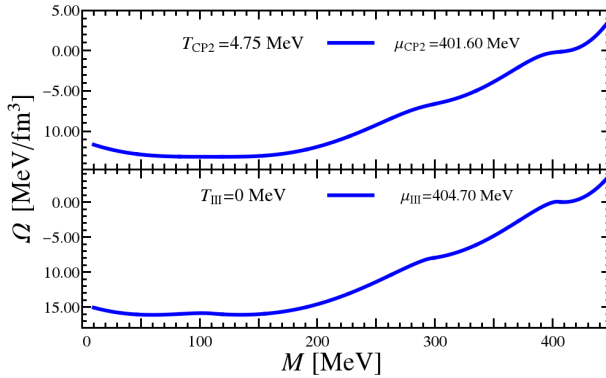


Figura 5.8: Coexistência de mínimos globais do potencial termodinâmico para algumas temperaturas selecionadas e potencial químico maior.

$T_{CP1} = 57.65 \text{ MeV}$. Em um valor de potencial químico mais elevado, $\mu_{III} = 404.70 \text{ MeV}$, podemos observar outra transição de primeira ordem caracterizada pela coexistência de dois mínimos simultâneos como pode ser visto na Fig.(5.8). Quando a temperatura cresce os dois mínimos do potencial termodinâmico transformam-se em apenas além do ponto crítico em $T_{CP2} = 4.75 \text{ MeV}$

Outro modo de verificar tais mudanças discutidas no potencial termodinâmico é considerar como a simetria quiral é restaurada (parcialmente, à rigor) conforme a temperatura se eleva na sequência de gráficos mostrada nas Figs.(5.9,5.10).

Para compreender o que ocorre podemos mapear as mudanças no potencial termodinâmico mostradas nas Fig.(5.7) e Fig.(5.8). Analisando as Figs.(5.9,5.10) torna-se evidente como o ponto triplo $TP1$ associado a três massas diferentes (marcado pelos quadrados pretos) determina um único potencial químico comum μ_{TP1} quando $T = 0$. Além disso, em $T = 0$ também há uma transição em μ_{III} que está relacionada com a Fig.(5.8) Se a temperatura cresce para $T = 10 \text{ MeV}$, tal coexistência tripla se desacopla em duas transições de primeira ordem ordinárias, as quais ocorrem em diferentes valores de potencial químico μ_{Ia} e μ_{Ib} . Próximo à $T = 21.4 \text{ MeV}$, estas duas linhas de primeira ordem distintas começam a aproximar-se uma da outra e observa-se outro ponto triplo $TP2$ em μ_{TP2} marcado pelos triângulos pretos. Acima desta temperatura, novamente restauramos o caso ordinário, onde aparece apenas uma linha de transição de primeira ordem a qual termina em um ponto crítico $CP1$.

Na Fig.(5.11) são apresentados os diagramas de fases nos planos $T - \mu$ e $P - T$ respectivamente para estes valores de B e G_V .

Analisando o gráfico anterior, verificamos que o diagrama de fases usual $P - T$ é drasticamente modificado em relação ao caso ordinário em $G_V = 0$, visto que a linha de coexistência de primeira ordem divide-se em muitos novos ramos. Na temperatura zero é possível a coexistência simultânea de três mínimos globais. Na Fig.(5.11), esta coexistência trifásica está marcada pelos quadrados como um ponto triplo $TP1$ tanto no diagrama $T - \mu$ quanto no plano $P - T$. Acompanhando novamente as Figs.(5.7,5.8,5.9,5.10), conforme a temperatura se eleva, vemos que esta coexistência tripla não pode mais ser alcançada e observamos a coexistência de apenas dois mínimos globais a qual acontece em potenciais químicos distintos ($\mu_{Ia} = 387.00 \text{ MeV}$ e $\mu_{Ib} = 387.65 \text{ MeV}$). O terceiro mínimo local é então rebaixado para a condição de um estado metável. Assim, o ponto triplo divide-se em duas linhas de primeira ordem como

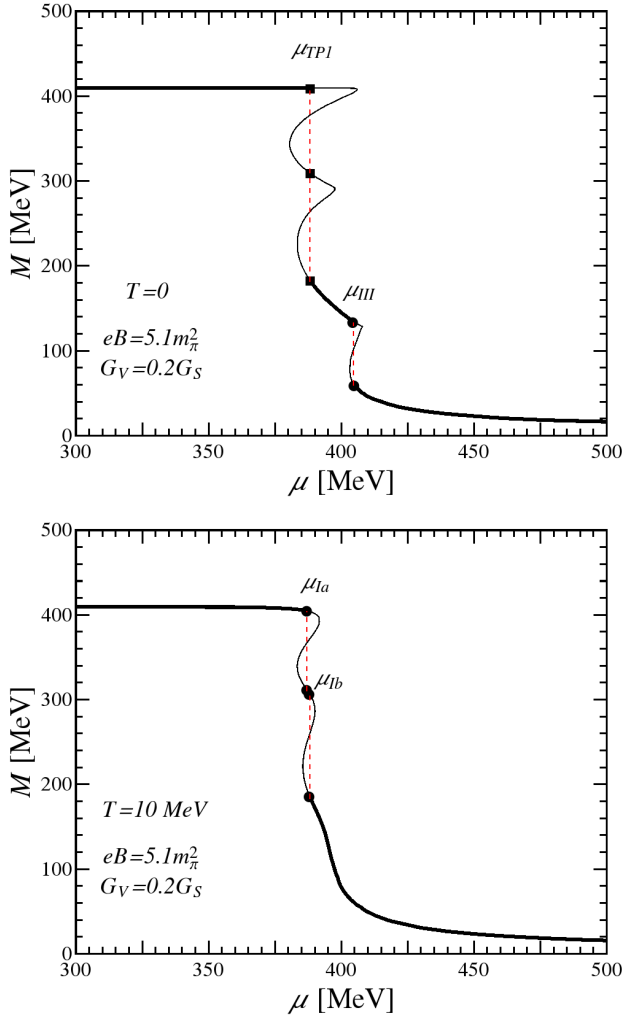


Figura 5.9: Sequência de gráficos mostrando como ocorre a restauração da simetria quiral com a elevação da temperatura, para $eB = 5.1 m_\pi^2$ e $G_V = 0.2 G_S$.

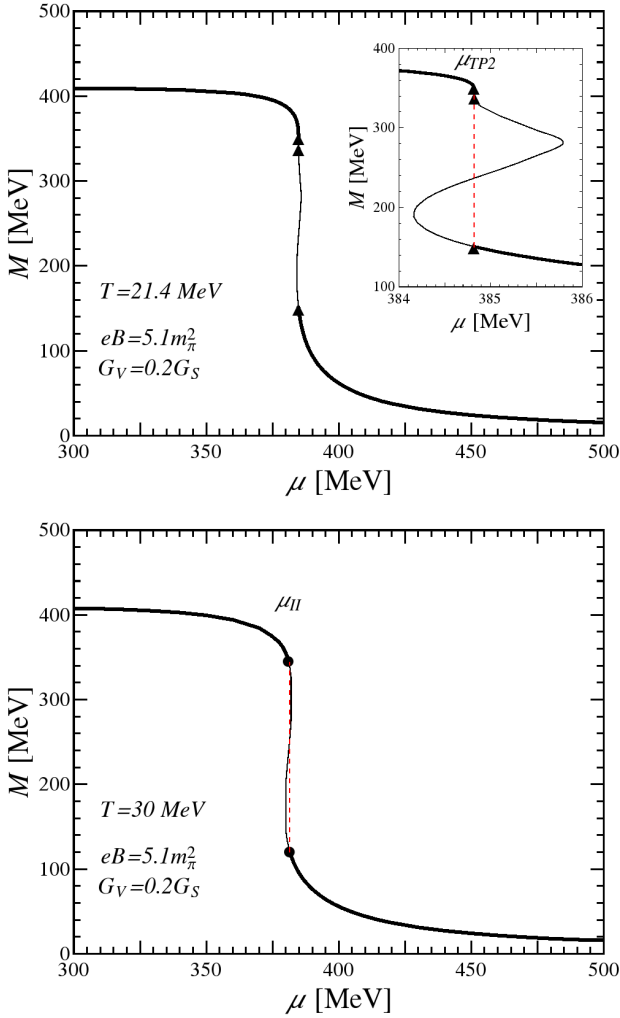


Figura 5.10: Sequência de gráficos mostrando como ocorre a restauração da simetria quiral com a elevação da temperatura, para $eB = 5.1 m_\pi^2$ e $G_V = 0.2 G_S$.

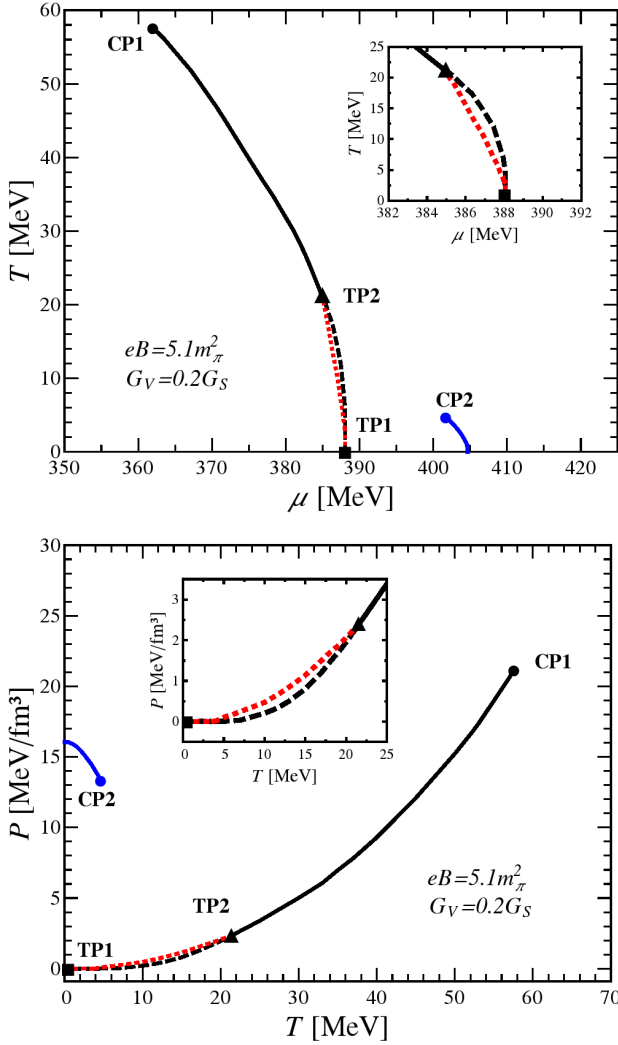


Figura 5.11: Diagrama de fases no plano $T - \mu$ (Painel Esquerdo) e no plano $P - T$ (Painel Direito) sob uma intensidade de campo magnético de $eB = 5.1m_\pi^2$ e acoplamento vetorial de $G_V = 0.2G_S$. Em $T = 0$, ambos os diagramas mostram um ponto triplo (TP1) no qual ocorre a coexistência trifásica. Quando a temperatura sobe, a coexistência trifásica não persiste e há a separação em duas linhas comuns de coexistência dual de fases como pode ser visto pelas áreas ampliadas. Em $T \simeq 21.4$ MeV, as linhas de coexistência dual convergem de modo assintótico para outro ponto triplo (TP2). Além desta temperatura, observa-se apenas uma linha de coexistência a qual acaba em um ponto crítico (CP1).

mostrado nas áreas ampliadas da Fig.(5.11). Conforme a temperatura aumenta ainda mais, estes diferentes potenciais químicos (ou pressões) de coexistência tenderão assintoticamente um ao outro e perto de $T = 21.4 \text{ MeV}$ dois mínimos fundem-se em apenas um. Isto pode ser visto como um fundo achatado no potencial termodinâmico próximo à $\mu_{TP2} = 384.82 \text{ MeV}$. Na Fig.(5.7), esta tendência então termina como outro ponto triplo $TP2$ at μ_{TP2} (marcado pelos triângulos pretos) onde a coexistência trifásica ocorre assintoticamente e repentinamente desaparece. Acima da temperatura $T = 21.4 \text{ MeV}$, o padrão de três mínimos retorna ao caso ordinário de apenas dois mínimos globais no potencial termodinâmico caracterizando assim apenas uma linha de primeira ordem comum (veja o caso $T = 30 \text{ MeV}$ nas Figs.(5.9,5.10)). Essa região está relacionada à linha de primeira ordem que pode se analogamente associada a uma transição do tipo “gás-líquido”. Na Fig.(5.11), esta linha de coexistência dual termina em um ponto crítico de segunda ordem $CP1$. Há outra linha de primeira ordem menor (linha azul na Fig.(5.11)) em um valor mais elevado de potencial químico (ou pressão) a qual podemos de forma análoga associar a uma transição cristalina para um nível de Landau mais elevado. Esta curva termina em um ponto crítico extraordinário $CP2$ e cuja posição nas Figs.(5.9,5.10) é dada por μ_{III} . Comparando a inclinação das curvas de coexistência no plano $P - T$ imediatamente percebemos que a linha de primeira ordem mais curta apresenta a derivada $\partial P / \partial T$ negativa em contraste com a linha de coexistência mais longa. Na Fig.(5.12), apresentamos o diagrama de fases no plano $T - \rho_B$ bem como as isotermas de Andrews para este caso onde $eB = 5.1 m_\pi^2$ e $G_V = 0.2 G_S$. A partir da análise destes gráficos podemos alcançar uma compreensão melhor a respeito do mecanismo subjacente que atua aqui. Os três quadrados pretos em $T = 0$ referem-se à coexistência simultânea de três densidades distintas na mesma pressão as quais podem ser diretamente mapeadas no plano $P - T$ como o ponto triplo ($TP1$).

Conforme a temperatura cresce, vemos que a coexistência trifásica não sobrevive e observa-se um desacoplamento em dois ramos separados Ia e Ib , os quais estão relacionados à duas transições de primeira ordem que ocorrem em valores distintos de pressão. Esta bifurcação em dois ramos de coexistência cria uma ilha de estabilidade entre as regiões Ia and Ib . Novamente, próximo a temperatura $T = 21.4 \text{ MeV}$ estas duas transições de primeira ordem distintas irão partilhar a mesma pressão em um segundo ponto triplo ($TP2$) como visto antes. A transição de primeira ordem remanescente, que corresponde à região II , então termina em um ponto crítico ordinário, $CP1$. Além disso, outro ramo

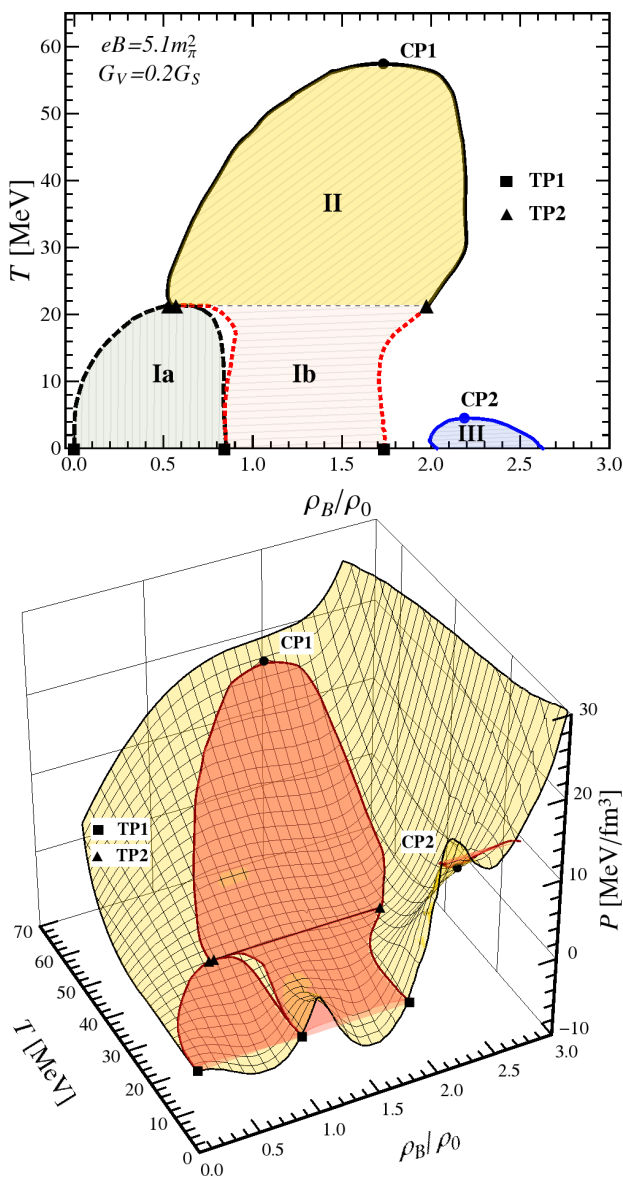


Figura 5.12: Diagrama de fases no plano $T - \rho_B$ (Painel Esquerdo) e isothermas (Painel Direito) para o caso onde $eB = 5.1 m_\pi^2$ e $G_V = 0.2 G_S$. Os quadrados e triângulos indicam os pontos triplos e os círculos indicam os pontos críticos.

de coexistência aparece na região de densidade mais alta, assinalado como *III* no painel esquerdo da Fig.(5.12). Como discutido antes, quando a temperatura se eleva além de $T \sim 5 \text{ MeV}$, esta transição de primeira ordem que lembra a transição sólido-líquido da água, com $\partial P/\partial T < 0$, culmina em um ponto crítico *CP2* e os estados magnetizados de Landau não podem mais ser populados.

Explorando o espaço de parâmetros de B e G_V pode-se também encontrar pares bem definidos que originam estados quadrifásicos, mas apenas em $T = 0$ e portanto sem tanta relevância para aplicações realistas. Resolvendo-se as equações do *gap* para uma intensidade de campo de $eB = 4.56 m_\pi^2$ e $G_V = 0.139 G_S$ encontramos a coexistência de quatro massas (ou densidades) distintas dos quarks ocorrendo no mesmo potencial químico (ou pressão). Na Fig.(5.13), mostramos o diagrama de fases no plano $\rho-T$ e as isotermas calculadas para este caso. As quatro densidades que coexistem em $T = 0$ e pressão nula estão marcados pelos pontos pretos. A conexão entre as densidades que aparecem no meio com a linha de coexistência circundante não foi observada pois os resultados são muito sensíveis aos valores numéricos inseridos. Portanto, esta condição de coexistência quadrifásica apresenta apenas importância acadêmica visto que sempre temos $T > 0$ mesmo para a matéria estelar ($T \approx 10 - 20 \text{ MeV}$). Estas fases múltiplas induzidas pelo campo tornam-se presentes porque o acoplamento vetorial repulsivo proporciona estabilidade aos estados intermediários de Landau e origina assim um cenário exótico no diagrama de fases.

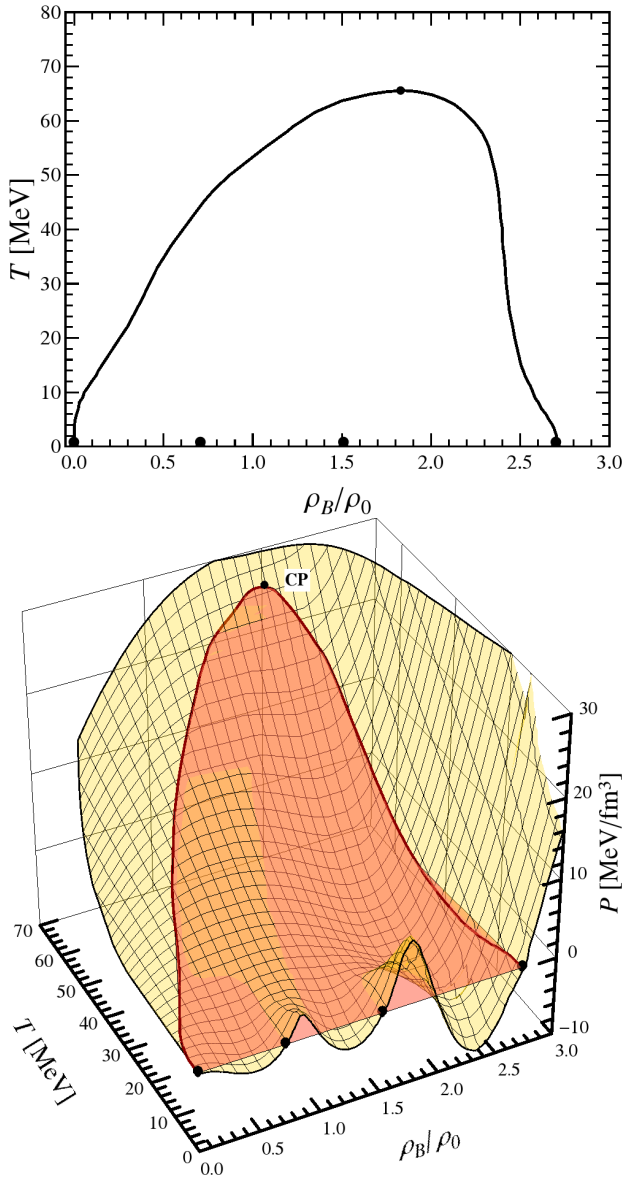


Figura 5.13: Diagrama de fases para a matéria de quarks no plano $T - \rho_B$ (Painel Esquerdo) e as respectivas isothermas (Painel Direito) sob uma intensidade de campo magnético de $eB = 4.56 m_\pi^2$ e acoplamento vetorial $G_V = 0.139 G_S$. Os pontos pretos próximos a temperatura zero representam a formação de um sistema quadrifásico, com quatro densidades distintas aparecendo na mesma pressão nula. Conforme a temperatura sobe, tais fases múltiplas não sobrevivem e o caso ordinário é restaurado.

5.4 Condições Paramétricas para a Formação de Estados Múltiplos

A ocorrência de fases múltiplas na mesma pressão somente é possível se observamos múltiplos mínimos de mesma profundidade no gráfico do potencial termodinâmico Ω . Tal condição pode ser obtida por meio da escolha de valores particulares de B e G_V os quais dão origem a múltiplas densidades coexistindo em um mesmo valor do potencial químico. Pelo mapeamento do espaço de parâmetros dos valores de (B, G_V^c, μ) , os quais resultam na coexistência trifásica em $T = 0$, encontramos um comportamento oscilatório característico como pode ser visto na Fig.(5.14).

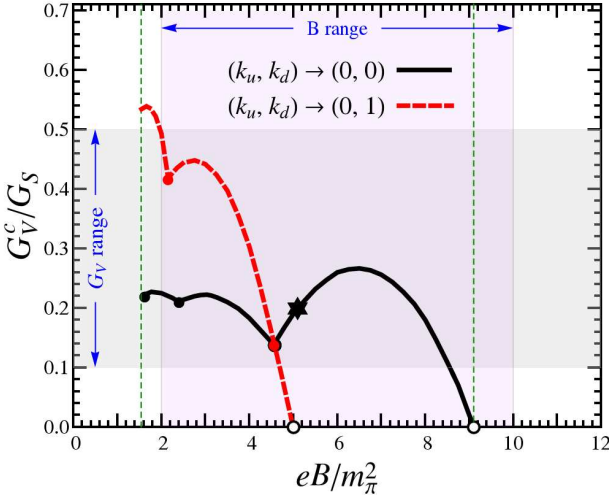


Figura 5.14: Valores críticos G_V^c da constante de acoplamento vetorial relativos aos estados intermediários $(k_u, k_d) = (0, 0)$ (linha contínua preta) e $(k_u, k_d) = (0, 1)$ (linha tracejada vermelha) em função do campo magnético para $T = 0$. As linhas representam os pares (B, G_V^c) associados com a formação de sistemas trifásicos. Os parâmetros relacionados com o aparecimento da coexistência quadrifásica estão marcados pelos pontos pretos. Também mostramos na figura o intervalo de campo magnético B e acoplamento vetorial G_V aceitáveis de acordo com as observações experimentais e estimativas teóricas. Aqui as linhas verticais pontilhadas em verde definem a janela de campo magnético onde a formação de estados múltiplos foi estudada. O círculo aberto em $G_V = 0$ representa a exclusão deste valor na coexistência trifásica.

Como explicado antes, cada acoplamento vetorial crítico, G_V^c ,

pode ser associado à condição limiar na qual um dado estado intermediário de massa começa a aparecer. Dependendo da intensidade do campo, mais de uma configuração de níveis (k_u, k_d) de Landau pode aparecer e cada uma apresenta seu próprio valor de G_V^c . Assim, deve existir um conjunto infinito de valores críticos G_V^c associados com um número infinito de estados intermediários (k_u, k_d) no limite de $B \rightarrow 0$ e $G_V \rightarrow \infty$.

Aqui, listamos apenas os dois primeiros conjuntos na Fig.(5.14), caracterizados pela emergência dos estados intermediários com $(k_u, k_d) = (0, 0)$ (linha contínua preta) e $(k_u, k_d) = (0, 1)$ (linha tracejada vermelha). As linhas mostradas na Fig.(5.14) representam pares de parâmetros (B, G_V^c) os quais resultam em um sistema trifásico. Além disso, os mínimos locais das oscilações de G_V^c (marcados por pontos pretos na Fig.(5.14)) estão relacionados a condição de coexistência quadrifásica.

A combinação de parâmetros relacionada ao caso estudado anteriormente, na Fig.(5.12), está indicada na Fig.(5.14) como uma estrela. Logo, nos valores de $eB = 5.1 m_\pi^2$ e $G_V = 0.2 G_S$, devemos observar apenas a configuração de níveis $(k_u, k_d) = (0, 0)$. A faixa horizontal indicada na Fig.(5.14) delimita o intervalo de campo magnético que pode ser observado em experimentos de colisão de íons pesados (como por exemplo no RHIC) e associado à estrelas de nêutrons. A faixa vertical determina o intervalo de valores de G_V segundo as estimativas teóricas atuais.

Na Fig.(5.15) são mostrados os valores do potencial químico de coexistência resultantes dos sistemas trifásicos e quadrifásicos respectivamente aos pares dados na Fig.(5.14). O fenômeno da catálise magnética inversa pode ser facilmente visto na Fig.(5.15), visto que o potencial químico de coexistência decresce a medida que o campo torna-se mais intenso. Ou seja, em baixas temperaturas e densidades altas a restauração da simetria quiral é favorecida pelo aumento na magnitude do campo.

A partir do gráfico mostrado na Fig.(5.14) pode-se extrair todo o comportamento dos diagramas de fases determinados pela influência mútua do campo magnético e do acoplamento vetorial. Se analisarmos a circunstância na qual temos $G_V < G_V^c$ podemos observar a ocorrência do caso ordinário onde somente uma linha de transição de primeira ordem está presente no diagrama de fases. Quando escolhemos $G_V = G_V^c$, uma condição de fases múltiplas torna-se possível e uma nova linha de primeira ordem “germina” a partir da linha de transição original. Para além do valor crítico de acoplamento vetorial $G_V > G_V^c$, a

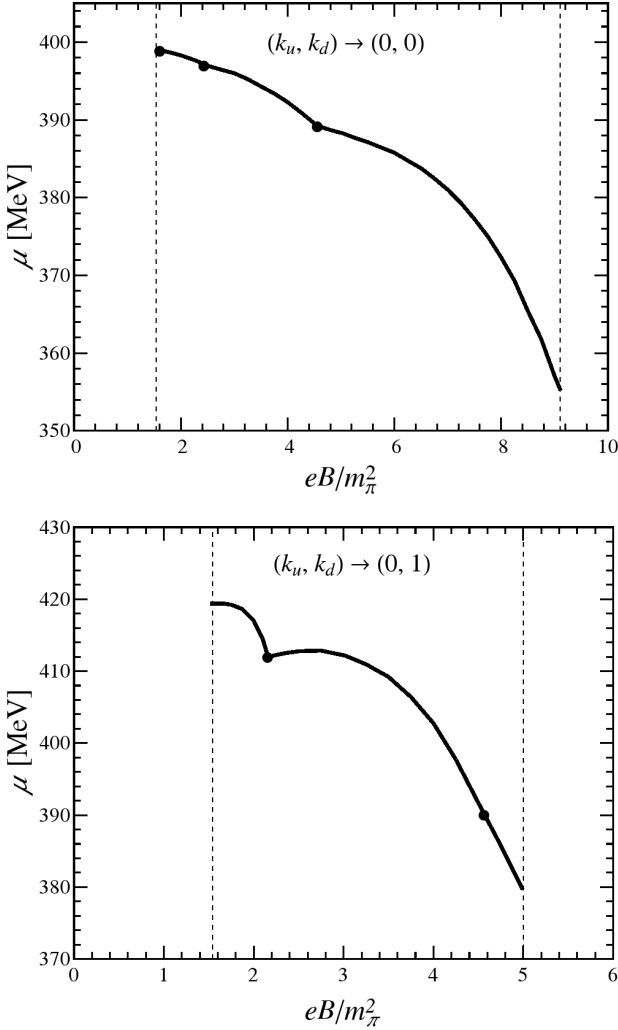


Figura 5.15: Valores do potencial químico de coexistência necessários à formação dos sistemas trifásicos (linha cheia) e dos sistemas quadrifásicos (pontos pretos) em $T = 0$.

restauração da simetria quiral deve ocorrer por meio de mais de uma linha de transição de primeira ordem em modo cascata.

Rigorosamente, como aqui estamos analisando apenas o setor de quarks leves, nosso sistema é melhor descrito como uma mistura binária de dois sabores f componentes. Portanto, as condições de estabilidade intrínseca estariam associadas a cada componente desta mistura. No entanto, os condensados dos quarks up e down devem resultar dinamicamente na mesma massa constituinte na equação do *gap* e tudo pode ser compreendido assumindo-se apenas uma espécie componente no sistema. De fato, nós podemos explicar o aparecimento destes sistemas trifásicos e quadrifásicos de quarks considerando a regra de fases de Gibbs

$$F = C - \Phi + I, \quad (5.3)$$

a qual estabelece que o número de graus de liberdade termodinâmicos F pode ser determinado por meio do número de espécies componentes C , pelo número de variáveis intensivas independentes I e pelo número de fases Φ em equilíbrio termodinâmico. Sob a influência de um campo magnético fixo, o estado termodinâmico é completamente determinado pelo par (T, P) no plano $T - P$ e assim $I = 2$. Neste caso, para uma coexistência trifásica $\Phi = 3$ e assumindo apenas uma espécie componente $C = 1$ nós temos $F = 0$ o que significa que esta condição somente é possível para um conjunto discreto de pontos triplos particulares no plano $T - P$ (veja a Fig.(5.11)). Agora, se o sistema está em contato com um reservatório de campo magnético B e permite-se que sua magnitude varie, o estado termodinâmico é agora completamente definido pela terna (T, P, B) e então $I = 3$.

Com esta variável intensiva adicional B , a coexistência trifásica $\Phi = 3$ é conduzida por $F = 1$ graus de liberdade, o que significa que existe uma linha de estados contíguos para um diagrama em função dos valores assumidos por B (veja a Fig.(5.14)). Por outro lado, se considerarmos a coexistência quadrifásica $\Phi = 4$, teremos $F = 0$ graus de liberdade, indicando que estes estados múltiplos são somente possíveis em alguns pontos particulares discretos (veja a Fig.(5.14)). Na Fig.(5.16) são mostrados os valores normalizados para os condensados de quark que estão associados com os estados múltiplos gerados pelos parâmetros encontrados nos gráficos das Figs.(5.14,5.15). As três massas distintas associadas com a condição de fase tripla são mostradas por meio das linhas com diferentes tracejados em ambos os casos e os saltos indicam a formação de sistemas quadrifásicos de quarks.

A coexistência múltipla observada em nossa análise permite o

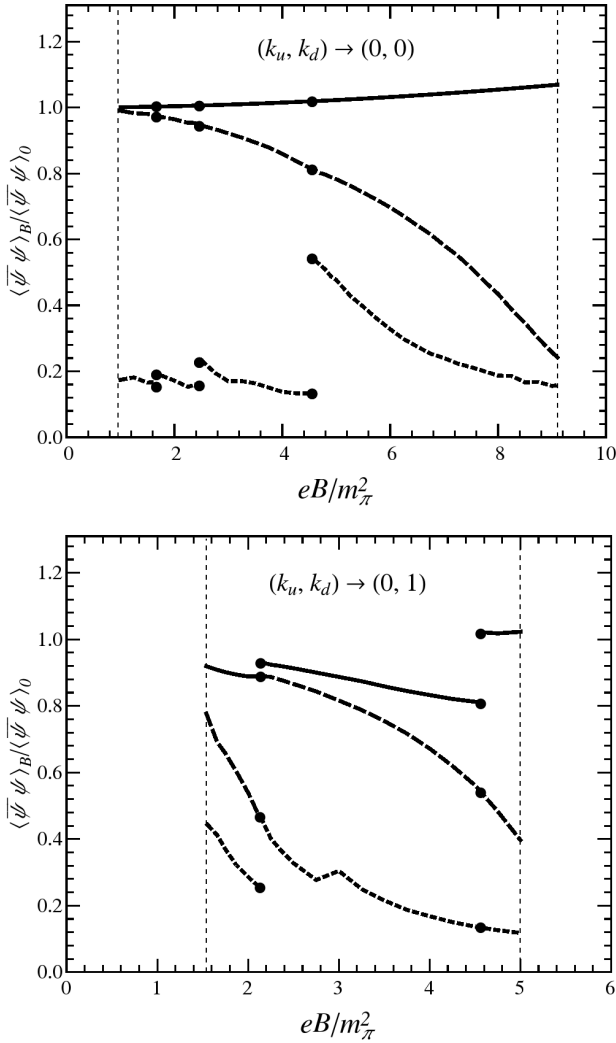


Figura 5.16: Valores normalizados para os condensados de quark associados com os sistemas multifásicos relativos a emergência dos estados intermediários $(k_u, k_d) = (0, 0)$ (Painel esquerdo) e $(k_u, k_d) = (0, 1)$ (Painel direito) para a temperatura $T = 0$.

aparecimento de uma condição peculiar na qual a matéria pode existir como pode ser visto na Fig.(5.17); para a combinação particular de parâmetros $eB = 5.724 m_\pi^2$ e $G_V = 0.256 G_S$ há a coexistência simultânea de três fases correspondentes às densidades $\rho \approx 0$, $\rho \approx 1.0\rho_0$ e $\rho \approx 2.0\rho_0$. Isso significa que na densidade nula temos a fase associada ao vácuo. A fase intermediária é caracterizada pela matéria nuclear, pois sua densidade é próxima ao valor encontrado no interior dos núcleos atômicos. Por fim, a densidade mais elevada pode ser associada ao aparecimento de uma fase de quarks.

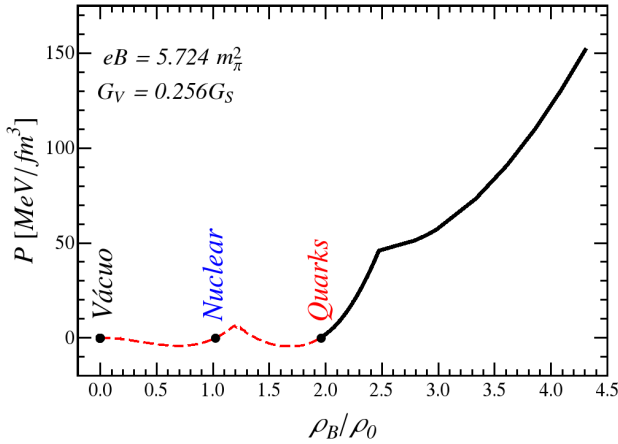


Figura 5.17: Coexistência simultânea de uma fase de vácuo, matéria nuclear e matéria de quarks na mesma pressão em temperatura nula para o valor de campo $eB = 5.724 m_\pi^2$ e acoplamento vetorial $G_V = 0.256 G_S$.

5.5 Sumário e Conclusões

Verificamos aqui como a introdução de uma interação vetorial repulsiva modifica significativamente o diagrama de fases para a matéria de quarks magnetizada no modelo SU(2) de NJL em temperatura finita. Analisamos como ocorre o desdobramento das fases magnéticas em função da introdução do parâmetro adicional G_V e vimos que de fato tal mecanismo não se manifesta no modelo a dois sabores quando há apenas a presença do campo magnético. Um trabalho publicado recentemente [116] comprova também o desdobramento em diversas densidades para a matéria de quarks magnetizada, mas apenas em

$T = 0$. As novas propriedades assumidas no diagrama de fases, que mostramos aqui, tornam-se apenas evidentes quando fazemos uma análise mais completa em temperatura finita. Em $T \neq 0$, conseguimos explorar fases que não se manifestam em temperatura nula. Neste contexto, estabelecemos que podem existir linhas de coexistência para a matéria de quarks associadas com a condição $\partial P/\partial T < 0$, a qual é similar ao que ocorre na transição sólido-líquido da água (dilatação anômala). Percebemos que a influência de G_V abre a possibilidade de aparecimento de pontos triplos no diagrama de fases e acreditamos que essa característica nunca havia sido considerada antes. Mostramos que existem famílias de combinações paramétricas de B e G_V as quais resultam em fases múltiplas e coincidentemente seus valores encontram-se dentro do intervalo esperado nos experimentos. Demonstramos como a regra de fases de Gibbs pode explicar a ocorrência desses sistemas multifásicos na matéria de quarks. A análise realizada aqui tem o intuito de mostrar a complexidade inerente aos diagramas de fases da QCD sob a ação de campos magnéticos intensos. No capítulo seguinte, vamos estender nossa análise dos efeitos magnéticos na interação forte por meio do cálculo explícito das magnetizações e mostrar como sua presença torna a equação de estado anisotrópica.

Capítulo 6

Anisotropia na Matéria de Quarks Magnetizada

Pretendemos estudar aqui outros efeitos proporcionados pela inclusão de um campo magnético externo à matéria bariônica densa. Nos capítulos precedentes, estudamos as consequências relativas à introdução do campo magnético B no diagrama de fases, bem como sua relação com um acoplamento vetorial G_V acrescentado à lagrangiana de NJL. Ao assumir a ação de um campo magnético sobre a matéria fermiônica eletrizada, verificamos que há a perda da simetria espacial esférica original, pois o campo induz a orientação do sistema em apenas uma direção. Nesse contexto, um dos aspectos mais importantes a mencionar refere-se a anisotropia do tensor energia-momento relativa à perda de simetria rotacional $O(3)$ na lagrangiana [117] quando inclui-se esse campo externo. Isto significa que a pressão do sistema torna-se anisotrópica, de modo que na direção paralela ao campo temos uma pressão P_{\parallel} e no plano perpendicular à orientação do vetor \vec{B} temos uma pressão distinta denominada pressão perpendicular P_{\perp} . Tais propriedades anisotrópicas para a matéria de quarks podem ser relevantes tanto na investigação da estrutura estelar de objetos compactos quanto no estudo de colisões de íons pesados ultrarelativísticos. O trabalho que será mostrado neste capítulo tem como base os resultados analíticos

publicados no artigo [118], o qual refere-se a anisotropia inerente ao modelo NJL com três sabores. Nosso objetivo consiste em verificar qual o efeito provocado pela introdução do acoplamento vetorial, G_V , sobre estas pressões P_{\parallel} e P_{\perp} usando o modelo de NJL SU(2). Também analisamos como a magnetização induzida pelo campo é influenciada pela interação vetorial. Por fim, vamos discutir qual a influência destes dois fatores B e G_V na estabilidade da matéria de quarks.

6.1 Anisotropia na Pressão

Assumindo uma dada lagrangiana de interação entre os quarks, pode-se determinar a expressão para a energia livre de Landau $\Omega(\mu, T, M, B)$, dependente do campo magnético constante B , para um meio denso à temperatura T e com potencial químico μ , como já mostramos antes. Exatamente para o valor de massa efetiva M , o qual minimiza a função $\Omega(\mu, T, M, B)$, a energia livre torna-se o potencial termodinâmico do sistema dado por

$$\Omega(\mu, T, M, B) = \varepsilon - Ts - \mu\rho - B\mathcal{M} , \quad (6.1)$$

onde \mathcal{M} é a magnetização induzida pelo campo por unidade de volume do sistema. Diferenciando esta expressão em relação às variáveis intensivas T, μ, B , podemos concluir que ¹

$$\begin{aligned} s(\mu, T, M, B) &= - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_{\mu, B} , \\ \rho(\mu, T, M, B) &= - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right)_{T, B} , \\ \mathcal{M}(\mu, T, M, B) &= - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial B} \right)_{\mu, T} , \\ P(\mu, T, M, B) &= -\Omega(\mu, T, M, B) , \\ \varepsilon(\mu, T, M, B) &= -P + Ts + \mu\rho + \mathcal{M}B . \end{aligned} \quad (6.2)$$

Se o sistema de partículas em questão apresenta magnetização positiva, o aumento da intensidade do campo externo resultará em uma

¹Resultado válido no limite termodinâmico para o qual o volume do sistema tende ao infinito.

consequente diminuição da energia livre de Landau, caracterizando assim um material paramagnético. Por outro lado, se a magnetização induzida for negativa, a energia livre tende a aumentar com a intensidade do campo e por conseguinte temos um comportamento diamagnético².

Como a tendência espontânea do sistema termodinâmico é sempre alcançar a condição de mínimo para a energia livre, um material diamagnético deve antes repelir o campo magnético do que aumentar Ω .

De acordo com as expressões 6.2, podemos determinar a densidade de magnetização \mathcal{M} calculando simplesmente a derivada da pressão em relação ao campo B

$$\mathcal{M} = \left(\frac{\partial P}{\partial B} \right)_{\mu, T} . \quad (6.3)$$

Sob o ponto de vista da hidrodinâmica relativística, um fluido no referencial de repouso sujeito a ação de um campo magnético B , apresenta o seguinte tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ quando B está orientado na direção z

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P - \mathcal{M}B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P - \mathcal{M}B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} , \quad (6.4)$$

de maneira que a anisotropia na pressão se traduz pelas componentes diagonais T^{ii} (com $i = 1, 2, 3$) diferentes. Em contraste, um fluido relativístico perfeito apresentaria as componentes T^{ii} iguais, o que implicaria na isotropia das pressões relativas às três direções espaciais, neste caso. Devido a tal anisotropia nas pressões paralela e perpendicular à direção do campo magnético, definem-se as pressões

$$\begin{aligned} P_{\parallel} &= P , \\ P_{\perp} &= P - \mathcal{M}B . \end{aligned} \quad (6.5)$$

²Na realidade é mais adequado associar a propriedade de paramagnetismo ou diamagnetismo com base no sinal apresentado pela suscetibilidade magnética χ_m . Para um meio linear temos que a densidade de magnetização é proporcional ao campo de excitação H aplicado $\vec{\mathcal{M}} = \chi_m \vec{H}$ (Aqui o campo de excitação H chamamos de B). Se a suscetibilidade magnética for positiva $\chi_m > 0$ e pequena o meio é paramagnético. Se $\chi_m < 0$ o meio é diamagnético.

6.2 Magnetização no Modelo de NJL SU(2) com Acoplamento Vetorial

Dada a lagrangiana de NJL para dois sabores como mostrado na Eq.(4.1), vamos determinar as expressões necessárias ao cálculo da magnetização de acordo com a Eq.(6.3). No capítulo 4, verificamos que o potencial termodinâmico para o sistema de quarks magnetizado sob a influência da interação vetorial pode ser determinado por meio da seguinte expressão

$$\Omega = \Omega_f + \frac{(M - m)^2}{4G_S} - \frac{(\mu - \tilde{\mu})^2}{4G_V}, \quad (6.6)$$

onde o termo Ω_f referente a cada sabor $f = (u, d)$ pode ser avaliado como

$$\Omega_f = \frac{i}{2} \text{Tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln [\not{p} - M + \tilde{\mu} \gamma^0]. \quad (6.7)$$

Como já discutido, esta parte do potencial termodinâmico pode ser escrita como a soma das seguintes contribuições relativas ao vácuo Ω_f^{vac} , à parte magnética Ω_f^{mag} e à influência térmica do meio denso Ω_f^{med}

$$\Omega_f = \left(\Omega_f^{vac} + \Omega_f^{mag} + \Omega_f^{med} \right)_{M, \tilde{\mu}}. \quad (6.8)$$

Cada uma destas contribuições é determinada de acordo com

$$\Omega_f^{vac} = \frac{N_c}{8\pi^2} \left[M^4 \ln \left(\frac{\Lambda + \epsilon_\Lambda}{M} \right) - \epsilon_\Lambda \Lambda (\Lambda^2 + \epsilon_\Lambda^2) \right],$$

$$\Omega_f^{mag} = -\frac{N_c |q_f| B)^2}{2\pi^2} \left[\zeta'(-1, x_f) - \frac{1}{2} (x_f^2 - x_f) \ln x_f + \frac{x_f^2}{4} \right],$$

$$\Omega_f^{med}|_{T>0} = -\frac{N_c |q_f| B}{2\pi} \sum_{k_f=0}^{\infty} \alpha_{k_f} T \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \ln \left[1 + e^{-(E_{k_f} \pm \tilde{\mu})/T} \right],$$

$$\Omega_f^{med}|_{T=0} = -\frac{N_c |q_f| B}{4\pi^2} \sum_{k_f=0}^{k_{f,max}} \alpha_{k_f} \left[\tilde{\mu} \sqrt{\tilde{\mu}^2 - s_f^2} - s_f^2 \ln \left(\frac{\tilde{\mu} + \sqrt{\tilde{\mu}^2 - s_f^2}}{s_f} \right) \right], \quad (6.9)$$

onde a contribuição Ω_f^{med} relativa à imersão das partículas interagentes em um meio denso de quarks mostra-se diferente em temperatura finita e temperatura nula. Novamente, aparece o fator $s_f(k_f, B) = \sqrt{M^2 + 2k_f|q_f|B}$ e a energia dos quarks associados ao nível de Landau k_f é $E_{k_f} = \sqrt{p_z^2 + 2k_f|q_f|B + M^2}$ como já estabelecido por meio da Eq.(4.10). O nível de Landau mais alto é definido como nos capítulos anteriores

$$k_{f,max} = \frac{\tilde{\mu}^2 - M^2}{2|q_f|B} . \quad (6.10)$$

O valor esperado para o condensado de quarks de cada sabor f é definido como

$$\phi_f = \langle \bar{\psi}_f \psi_f \rangle = -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi^4)} \text{Tr} \left[\frac{1}{\not{p} - M + \tilde{\mu} \gamma^0 + i\epsilon} \right] , \quad (6.11)$$

o qual também pode ser separado em três contribuições distintas [83, 119]

$$\phi_f = \left(\phi_f^{vac} + \phi_f^{mag} + \phi_f^{med} \right)_{M, \tilde{\mu}} . \quad (6.12)$$

Cada contribuição por sua vez é determinada de acordo com as seguintes equações

$$\begin{aligned} \phi_f^{vac} &= -\frac{N_c M}{2\pi^2} \left[\Lambda \sqrt{\Lambda^2 + M^2} - M^2 \ln \left(\frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + M^2}}{M} \right) \right] , \\ \phi_f^{mag} &= -\frac{N_c M |q_f| B}{2\pi^2} \left[\ln \Gamma(x_f) - \frac{1}{2} \ln(2\pi) + x_f - \frac{1}{2} (2x_f - 1) \ln(x_f) \right] , \\ \phi_f^{med}|_{T>0} &= \frac{N_c M |q_f| B}{2\pi} \sum_{k_f=0}^{\infty} \alpha_{k_f} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \frac{1}{E_{k_f}} (n_{p,k_f} + \bar{n}_{p,k_f}) , \end{aligned} \quad (6.13)$$

onde n_{p,k_f} e \bar{n}_{p,k_f} são as funções de distribuição fermiônica para os quarks e os antiquarks, respectivamente. Temos também que a contribuição do meio denso para o condensado em temperatura nula é calculada como

$$\phi_f^{med}|_{T=0} = \frac{N_c M |q_f| B}{2\pi^2} \sum_{k_f=0}^{k_{f,max}} \alpha_{k_f} \ln \left[\frac{\tilde{\mu} + \sqrt{\tilde{\mu}^2 - s_f^2}}{s_f} \right] . \quad (6.14)$$

Tanto as expressões mostradas para o potencial termodinâmico quanto para os condensados, devem ser obtidas a partir das soluções autoconsistentes $(M, \tilde{\mu})$ das equações de *gap* Eq.(4.20)

$$\begin{aligned} M &= m - 2G_S(\phi_u + \phi_d) , \\ \tilde{\mu} &= \mu - 2G_V(\rho_u + \rho_d) , \end{aligned} \quad (6.15)$$

de modo que as densidades de partículas para ambos os sabores são dadas por

$$\begin{aligned} \rho_f|_{T>0} &= \frac{N_c |q_f| B}{2\pi^2} \sum_{k_f=0}^{\infty} \alpha_{k_f} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z (n_{p,k_f} - \bar{n}_{p,k_f}) , \\ \rho_f|_{T=0} &= \frac{N_c |q_f| B}{2\pi^2} \sum_{k_f=0}^{k_{f,max}} \alpha_{k_f} \sqrt{\tilde{\mu}^2 - s_f^2} , \end{aligned} \quad (6.16)$$

onde a densidade bariônica é obtida como

$$\rho_B = \frac{1}{3} \sum_{f=u,d} \rho_f . \quad (6.17)$$

Para determinar a pressão paralela à direção do campo a partir do potencial termodinâmico vamos empregar a equação Eq.(6.2) $P = -\Omega$. Usando as expressões Eq.(6.6) e Eq.(6.15) verificamos que

$$P = -(\Omega_u + \Omega_d) - G_S(\phi_u + \phi_d)^2 + G_V(\rho_u + \rho_d)^2 . \quad (6.18)$$

Todo o formalismo apresentado aqui nesta seção em nada difere daquele utilizado nos capítulos anteriores onde estudamos os efeitos da interação vetorial sobre a matéria de quarks magnetizada. Aqui apenas reescrevemos as expressões em uma notação equivalente que será mais adequada ao estudo da anisotropia.

6.3 Cálculo da Magnetização

Como explicado no início, a anisotropia nas pressões ocorre em função da magnetização do sistema inerente à aplicação do campo externo. Para calcular a magnetização consideramos apenas a discretização do momento angular dos quarks no plano transversal relativa ao preenchimento dos níveis de Landau. Aqui não são considerados efeitos relacionados ao momento magnético anômalo dos quarks. Vale ressaltar que tal análise complementar seria importante inclusive para partículas descarregadas, as quais poderiam sofrer a ação do campo externo por este mecanismo [120]. De acordo com a expressão para a densidade de magnetização mostrada na Eq.(6.3), podemos derivar a pressão $P(\tilde{\mu}, M, B)$ em relação ao campo magnético B usando a regra da Cadeia

$$\frac{dP}{dB} = \frac{\partial P}{\partial B} + \left(\frac{\partial P}{\partial M} \right) \left(\frac{\partial M}{\partial B} \right) + \left(\frac{\partial P}{\partial \tilde{\mu}} \right) \left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial B} \right) . \quad (6.19)$$

Como as derivadas $\partial P/\partial M$ e $\partial P/\partial \tilde{\mu}$ resultam nas equações do *gap* Eq.(4.20) que se anulam nos valores extremos para a energia livre, temos que os dois últimos termos na expressão acima não contribuem e assim basta calcular a derivada explícita em B para obter a magnetização

$$\mathcal{M}(\mu, \tilde{\mu}, T, M, B) = \frac{dP}{dB} = \frac{\partial P}{\partial B} . \quad (6.20)$$

Tomando a derivada da expressão mostrada na Eq.(6.18), devemos obter a densidade de magnetização expressa como

$$\mathcal{M} = \frac{\partial P}{\partial B} = -(\Omega'_u + \Omega'_d) - 2G_S(\phi_u + \phi_d)(\phi'_u + \phi'_d) + 2G_V(\rho_u + \rho_d)(\rho'_u + \rho'_d) , \quad (6.21)$$

onde o símbolo denominado plica ou linha ' indicada nos termos acima representa a respectiva derivação em relação ao campo magnético. Assim, o cálculo da magnetização dependerá da avaliação de cada uma destas derivadas. No caso da derivada do potencial termodinâmico Ω'_f , temos que

$$\Omega'_f = \left(\Omega'^{vac}_f + \Omega'^{mag}_f + \Omega'^{med}_f \right)_M , \quad (6.22)$$

de modo que as derivadas associadas a cada contribuição são mostradas a seguir (ver Apêndice G)

$$\Omega_f'^{vac} = 0 ,$$

$$\Omega_f'^{mag} = 2\frac{\Omega_f^{mag}}{B} + \frac{N_c M^2 |q_f|}{4\pi^2} \left[\ln \Gamma(x_f) - \frac{1}{2} \ln(2\pi) + x_f - \left(x_f - \frac{1}{2}\right) \ln(x_f) \right] ,$$

$$\Omega_f'^{med}|_{T>0} = \frac{\Omega_f^{med}}{B} + \frac{N_c |q_f|^2 B}{4\pi^2} \sum_{k_f=0}^{\infty} \alpha_{k_f} k_f \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z \frac{1}{E_{k_f}} (n_{p,k_f} + \bar{n}_{p,k_f}) ,$$

$$\Omega_f'^{med}|_{T=0} = \frac{\Omega_f^{med}}{B} + \frac{N_c |q_f|^2 B}{2\pi^2} \sum_{k_f=0}^{k_{f,max}} \alpha_{k_f} k_f \ln \left(\frac{\tilde{\mu} + \sqrt{\tilde{\mu}^2 - s_f^2}}{s_f} \right) . \quad (6.23)$$

Também precisamos obter as expressões para as derivadas das contribuições nos condensados

$$\phi_f' = \left(\phi_f'^{vac} + \phi_f'^{mag} + \phi_f'^{med} \right)_M . \quad (6.24)$$

Realizando as derivações necessárias concluímos também que

$$\phi_f'^{vac} = 0 ,$$

$$\phi_f'^{mag} = \frac{N_c M}{4\pi^2} \left\{ \frac{M^2}{B} \left[\psi^{(0)}(x_f) - 1 \right] + |q_f| \left[1 - \ln \left(\frac{x_f}{2\pi} \right) - 2 \ln \Gamma(x_f) \right] \right\} ,$$

$$\begin{aligned} \phi_f'^{med}|_{T>0} = & \frac{\phi_f^{med}}{B} - \frac{N_c |q_f|^2 B}{4\pi^2} \sum_{k_f=0}^{\infty} \alpha_{k_f} k_f \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z \\ & \times \left\{ \frac{n_{p,k_f}}{E_{k_f}^2} \left[\frac{1}{E_{k_f}} + \frac{n_{p,k_f}}{T} e^{(E_{k_f} - \tilde{\mu})/T} \right] \right. \\ & \left. + \frac{\bar{n}_{p,k_f}}{E_{k_f}^2} \left[\frac{1}{E_{k_f}} + \frac{\bar{n}_{p,k_f}}{T} e^{(E_{k_f} + \tilde{\mu})/T} \right] \right\} , \end{aligned}$$

$$\phi_f'^{med}|_{T=0} = \frac{\phi_f^{med}}{B} - \frac{N_c |q_f|^2 B}{2\pi^2} \sum_{k_f=0}^{k_{f,max}} \frac{\alpha_{k_f} k_f \tilde{\mu} M}{s_f^2 \sqrt{\tilde{\mu}^2 - s_f^2}} . \quad (6.25)$$

A influência da interação vetorial no cálculo da anisotropia será basicamente introduzida por meio da derivada da densidade, ρ_f' , como

podemos perceber por meio da Eq.(6.21). Devemos obter tal derivada para os dois casos onde $T = 0$ e $T > 0$. Analisando a expressão Eq.(6.16) em temperatura finita e as distribuições de Fermi, vemos que a derivada da densidade pode ser escrita como

$$\rho'_f|_{T>0} = \frac{\partial \rho_f}{\partial B} + \left[\left(\frac{\partial \rho_f}{\partial n_{p,k_f}} \right) \left(\frac{\partial n_{p,k_f}}{\partial E_{k_f}} \right) + \left(\frac{\partial \rho_f}{\partial \bar{n}_{p,k_f}} \right) \left(\frac{\partial \bar{n}_{p,k_f}}{\partial E_{k_f}} \right) \right] \left(\frac{\partial E_{k_f}}{\partial B} \right). \quad (6.26)$$

Calculando todos os termos temos que em temperatura finita a derivada da densidade é dada por:

$$\begin{aligned} \rho'_f|_{T>0} = \frac{\rho_f}{B} - \frac{N_c |q_f|^2 B}{2\pi^2} \sum_{k_f=0}^{\infty} \alpha_{k_f} k_f \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z \\ \times \left\{ \frac{1}{T E_{k_f}} \left[n_{p,k_f}^2 e^{(E_{k_f} - \tilde{\mu}_f)/T} - \bar{n}_{p,k_f}^2 e^{(E_{k_f} + \tilde{\mu}_f)/T} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Para o caso onde a temperatura é nula podemos determinar esta derivada como

$$\rho'_f|_{T=0} = \frac{d\rho_f}{dB} = \frac{\partial \rho_f}{\partial B} + \left(\frac{\partial \rho_f}{\partial k_F} \right) \left(\frac{\partial k_F}{\partial s_f} \right) \left(\frac{\partial s_f}{\partial B} \right). \quad (6.28)$$

As duas últimas derivadas são calculadas facilmente usando as equações que definem s_f e o momento de Fermi, e assim

$$\left(\frac{\partial k_F}{\partial s_f} \right) = -\frac{s_f}{k_F}, \quad \left(\frac{\partial s_f}{\partial B} \right) = \frac{k_f |q_f|}{s_f}. \quad (6.29)$$

Portanto, temos que

$$\rho'_f|_{T=0} = \frac{\rho_f}{B} - \frac{N_c |q_f|^2 B}{2\pi^2} \sum_{k_f=0}^{k_{f,max}} \frac{\alpha_{k_f} k_f}{k_F}. \quad (6.30)$$

Dessa maneira, pela determinação das derivadas que foram mostradas nas Eqs.(6.22,6.23,6.24,6.25,6.27 e 6.30) torna-se possível obter a densidade de magnetização mostrada na Eq.(6.21). No entanto, a magnetização depende da pressão e esta última precisa ser normalizada fazendo convenientemente $P = P_{\parallel}(\mu, T, M, B) = P(\mu, T, M, B) -$

$P(0, 0, M_{vac}(B), B) = -[\Omega(\mu, T, M, B) - \Omega(0, 0, M_{vac}(B), B)]$. Onde M_{vac} é a massa efetiva para o estado de vácuo quando $\mu = 0$ e $T = 0$ e que depende do valor do campo magnético B . Ao normalizarmos a pressão perpendicular temos que

$$P_{\perp}(\mu, T, M, B) = P - \left(\frac{\partial P}{\partial B} \right) B . \quad (6.31)$$

Ao subtrairmos a pressão perpendicular calculada no estado de vácuo $P_{\perp}(0, 0, M_{vac}(B), B)$ temos que a pressão perpendicular normalizada é escrita como

$$P_{\perp} = [P(\mu, T, M, B) - P(0, 0, M_{vac}(B), B)] - \left[\frac{\partial P}{\partial B}(\mu, T, M, B) - \frac{\partial P}{\partial B}(0, 0, M_{vac}(B), B) \right] B , \quad (6.32)$$

o que resulta simplesmente na normalização da magnetização

$$P_{\perp} = [P(\mu, T, M, B) - P(0, 0, M_{vac}(B), B)] - [\mathcal{M}(\mu, T, M, B) - \mathcal{M}(0, 0, M_{vac}(B), B)] B . \quad (6.33)$$

Os valores de vácuo da magnetização $\mathcal{M}(0, 0, M_{vac}(B), B)$ devem ser determinados usando a expressão mostrada na Eq.(6.21). Seus termos devem ser avaliados somente sobre as contribuições de vácuo e magnéticas, pois não há contribuição do meio para o estado de vácuo quando $\mu = 0$ e $T = 0$, pois neste caso as soluções da equação de *gap* devem ser $M = M_{vac}$ e $\tilde{\mu} = 0$ e assim

$$\begin{aligned} \Omega_f(0, 0, M_{vac}(B), B) &= \left(\Omega_f^{vac} + \Omega_f^{mag} \right)_{M_{vac}, 0} , \\ \phi_f(0, 0, M_{vac}(B), B) &= \left(\phi_f^{vac} + \phi_f^{mag} \right)_{M_{vac}, 0} , \\ \Omega'_f(0, 0, M_{vac}(B), B) &= \left(\Omega'_f{}^{vac} + \Omega'_f{}^{mag} \right)_{M_{vac}, 0} , \\ \phi'_f(0, 0, M_{vac}(B), B) &= \left(\phi'_f{}^{vac} + \phi'_f{}^{mag} \right)_{M_{vac}, 0} . \end{aligned} \quad (6.34)$$

Finalmente, para obter a equação de estado associada a matéria de quarks magnetizada necessitamos ainda calcular a densidade de energia, ε . A expressão que define ε é mostrada na Eq.(6.2) e deve depender da densidade de entropia, s_f , calculada para cada sabor f . A entropia fermiônica é então dada por

$$\begin{aligned}
 s_f|_{T>0} = & -\frac{N_c|q_f|B}{4\pi^2} \sum_{k_f=0}^{k_{f,max}} \alpha_{k_f} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z \\
 & \times \left[n_{p,k_f} \ln n_{p,k_f} + (1 - n_{p,k_f}) \ln (1 - n_{p,k_f}) \right. \\
 & \left. + \bar{n}_{p,k_f} \ln \bar{n}_{p,k_f} + (1 - \bar{n}_{p,k_f}) \ln (1 - \bar{n}_{p,k_f}) \right] ,
 \end{aligned} \tag{6.35}$$

e

$$s_f|_{T=0} = 0 .$$

6.4 Influência da Interação Vetorial na Magnetização

Os resultados numéricos mostrados aqui referem-se ao mesmo conjunto de parâmetros usado antes $\Lambda = 590 \text{ MeV}$, $G_S \Lambda^2 = 2.435$ and $m = 6.0 \text{ MeV}$. Devemos nos restringir agora apenas ao caso onde a temperatura é nula, pois o cálculo das expressões mostradas em temperatura finita envolve equações do *gap* mais complicadas o que resultaria em um esforço numérico adicional. Através das expressões anteriores para a magnetização, podemos avaliar quando a anisotropia nas pressões $P_{\parallel} \neq P_{\perp}$ torna-se apreciável em comparação ao caso isotrópico ordinário onde $P_{\parallel} = P_{\perp}$ quando $B \rightarrow 0$. Não há necessariamente um valor característico de campo magnético além do qual observa-se uma discrepância considerável nas pressões. Desde que exista um campo externo não nulo, haverá anisotropia em maior ou menor grau. Pode-se contudo estabelecer um dado critério [117] para a delimitação de um valor limítrofe de campo magnético acima do qual a diferença nas pressões torna-se importante em relação à outros efeitos.

Para entender como a introdução do acoplamento vetorial deve afetar a magnetização do sistema de quarks e consequentemente a anisotropia nas pressões, devemos analisar a expressão para o momento de Fermi em temperatura nula $T = 0$

$$k_F = \sqrt{\tilde{\mu}^2 - s_f^2} = \sqrt{(\mu - 2G_V \rho_f)^2 - M^2 - 2k_f |q_f| B} . \quad (6.36)$$

No caso quando $G_V = 0$ e $B = 0$, enquanto o potencial químico μ do sistema for inferior à massa constituinte M a simetria quiral apresenta-se quebrada. A restauração da simetria quiral só ocorre quando $\mu > M$ e a densidade deixa ser nula quando $k_F > 0$. Com a inserção do campo magnético $B \neq 0$ e mantendo-se $G_V = 0$, verificamos que a expressão acima poderá apresentar zeros diferentes em função dos valores de k_f e M assumidos em um determinado valor de μ . No entanto, como discutido antes, para o modelo SU(2) de NJL observamos que nem todos estes valores de massa efetiva são termodinamicamente estáveis visto que não determinam um mínimo global para a energia livre. A restauração da simetria quiral ocorre apenas para a combinação (μ, M, k_f) à qual implica tal minimização global.

Por meio da introdução do parâmetro adicional G_V , percebemos que a presença de um termo vetorial repulsivo pode influenciar a estabilidade das soluções nas equações de *gap* e tornar termodinamicamente estáveis estados anteriormente instáveis quando apenas o campo magnético estava presente. Haverá então a possibilidade de formação de fases intermediárias com diferentes densidades associadas a cada nível de Landau que o sistema pode assumir.

Ao definir a magnetização por meio da equação Eq.(6.21), estabelecemos que basicamente o acoplamento vetorial deve influenciar \mathcal{M} por meio da densidade e sua derivada, ρ'_f . A expressão para ρ_f , Eq.(6.16), nos mostra que a densidade em temperatura nula deve ser essencialmente proporcional ao momento de Fermi e depender de G_V de acordo com as soluções determinadas pelas equações do *gap*. Como visto anteriormente no capítulo 4, os valores assumidos para a densidade da matéria de quarks devem apresentar as oscilações de De Haas-van Alphen conforme o campo magnético externo assume diferentes valores. Na Fig.(6.1), mostramos as densidades determinadas para diferentes valores de G_V em função do campo magnético para o potencial químico $\mu = 500$ MeV. Aqui é interessante comparar as figuras Fig.(4.14) e Fig.(6.1) e perceber que a primeira é diferente da segunda visto que as densidades mostradas na Fig.(4.14) estão associadas à região de transição. Na Fig.(6.1), como a densidade é avaliada em um potencial químico mais elevado $\mu = 500$ MeV, esta sofre menor influência da transição em si pois a massa dos quarks apresenta um comportamento monotônico mais regular nessa região.

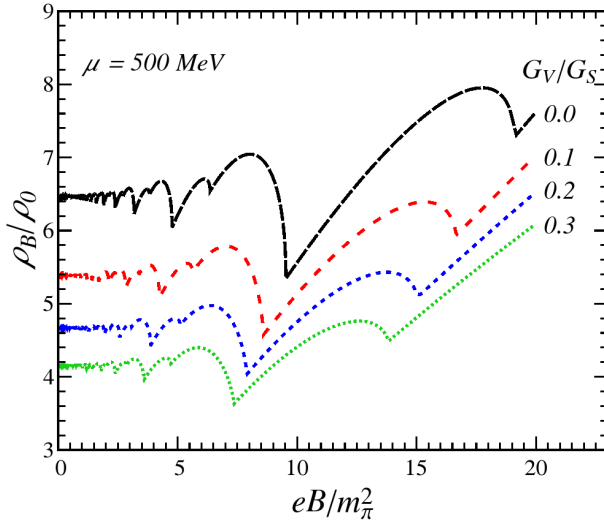


Figura 6.1: Oscilações de De Haas-van Alphen para a densidade da matéria de quarks em função do campo magnético calculadas para alguns valores de acoplamento vetorial G_V e potencial químico $\mu = 500$ MeV.

Se a densidade apresenta estas oscilações de De Haas-van Alphen, a mesma característica deve refletir-se no cálculo da magnetização em virtude da Eq.(6.21). Além disso, a dependência da magnetização no acoplamento vetorial deve ocorrer também por meio da derivada da densidade em função do campo magnético. Pela inspeção da Fig.(6.1) verificamos facilmente que a estrutura de multicúspides torna a derivada de ρ_f em relação à B descontínua assumindo valores positivos e negativos. Nas Figs.(6.2,6.3) apresentamos os gráficos para a densidade de magnetização em função do campo externo aplicado. Podemos concluir de acordo com esse resultado que quando $G_V = 0$ a magnetização é essencialmente positiva para valores mais elevados do campo magnético. De acordo com nossa discussão no início deste capítulo, isto significa que a matéria de quarks apresenta um comportamento paramagnético para estes valores de B . A densidade de magnetização \mathcal{M} em $G_V = 0$ torna-se negativa somente para valores menores que aproximadamente $eB < 1.0 m_\pi^2$. Em média, a magnetização tende a crescer com a intensidade do campo magnético que atua nos férmions. Esse resultado é qualitativamente similar ao determinado pela aplicação de outros modelos, por exemplo pela

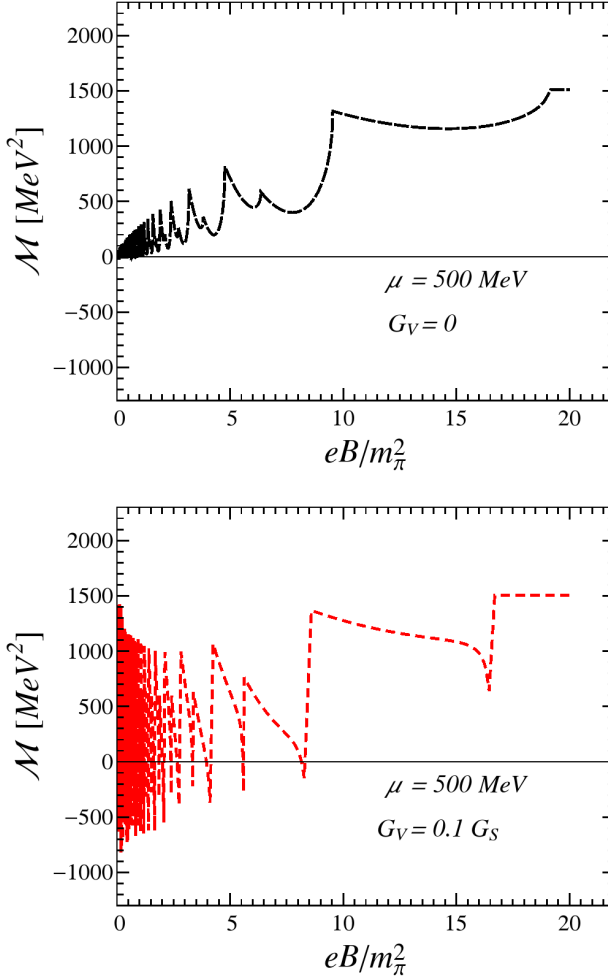


Figura 6.2: Dependência da densidade de magnetização para a matéria densa de quarks em função do campo magnético B aplicado para diferentes valores de acoplamento vetorial G_V para $\mu = 500 MeV$.

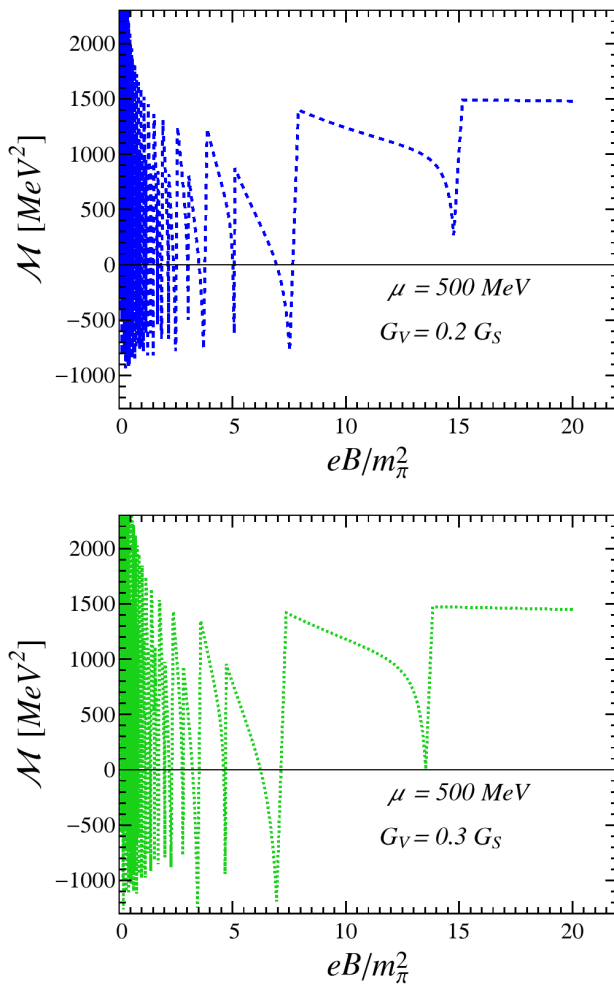


Figura 6.3: Dependência da densidade de magnetização para a matéria densa de quarks em função do campo magnético B aplicado para diferentes valores de acoplamento vetorial G_V para $\mu = 500 \text{ MeV}$.

aplicação da hidrodinâmica relativística anisotrópica [121].

Quando introduzimos a interação vetorial fazendo $G_V > 0$, modificamos a dependência funcional da densidade de magnetização como mostrado nas Figs.(6.2,6.3). A forma das oscilações é alterada e em lugar das curvas suaves apresentadas pelo caso $G_V = 0$ vemos que aparecem variações mais bruscas em virtude da contribuição oferecida pela derivada da densidade. A posição dos máximos e mínimos das oscilações também sofre um deslocamento para valores menores de B conforme o acoplamento G_V torna-se mais intenso. Os picos que aparecem na densidade de magnetização quando $G_V > 0$, são a rigor divergentes em virtude de ρ'_f e saltos mais intensos podem ser observados discretizando mais o cálculo nessas regiões dos gráficos. Com a presença da interação vetorial também verificamos que a magnetização oscila entre valores positivos e negativos e este efeito torna-se mais pronunciado quanto maior a magnitude de G_V . Isso demonstra que o sistema fermiônico pode apresentar tanto um comportamento paramagnético ($\mathcal{M} > 0$) quanto diamagnético ($\mathcal{M} < 0$) sob diferentes valores de B . Pela expressão mostrada na Eq.(6.18) podemos deduzir simplificadaamente que a pressão cresce com o acoplamento vetorial G_V para determinados valores de B e μ . Quanto maior a repulsão existente entre as partículas maior P nesse caso. Assim, o aumento no acoplamento de repulsão vetorial deve caracterizar uma redução na energia livre o que permite que configurações de caráter diamagnético outrora instáveis sejam de fato permitidas pela presença de G_V . Isso pode ser deduzido analisando a equação $\Omega(\mu, T, M, B) = \varepsilon - Ts - \mu\rho - B\mathcal{M}$. No caso ordinário, quando $G_V = 0$, a energia livre de Landau aumenta se B cresce para o caso quando $\mathcal{M} < 0$ e daí resulta o comportamento diamagnético. No entanto, se temos $G_V > 0$, o valor de μ deve ser maior para a mesma densidade pois agora temos o efeito repulsivo do meio que tende a aumentar o potencial químico do sistema. Isso permite que a energia livre seja menor mesmo que a magnetização torne-se negativa dentro de certos limites. Pode-se notar analisando as Figs.(6.2,6.3) que em valores não nulos de G_V a magnetização é negativa apenas até um valor máximo de campo magnético além do qual retornamos ao caso paramagnético onde $\mathcal{M} > 0$.

Conforme foi demonstrado na referência [118], a magnetização torna-se negativa mesmo em $G_V = 0$ no modelo SU(3). Isso acontece porque a inclusão do quark s no modelo aumenta o número de graus de liberdade do problema o que faz com que a densidade de energia, ε , seja maior em relação ao caso com dois sabores. Se a densidade de energia aumenta, mesmo que a magnetização seja negativa (caso

diamagnético) o campo magnético pode aumentar e ainda assim tal configuração resultar em um mínimo na energia livre. Em razão disto, é possível obter um comportamento diamagnético para a matéria de quarks tanto usando o modelo NJL SU(2) com G_V não nulo, quanto usando o modelo NJL SU(3) sem G_V .

Para observar a anisotropia nas pressões podemos determinar como as pressões paralela P_{\parallel} e perpendicular P_{\perp} dependem intrinsecamente da intensidade do campo magnético. Nas Figs.(6.4,6.5), apresentamos os resultados numéricos referentes a este cálculo das pressões P_{\parallel} e P_{\perp} sob diferentes valores de acoplamento vetorial G_V . Visualizando os gráficos, podemos perceber que, para $G_V = 0$, as pressões tornam-se distintas e essa diferença tende a crescer com o valor do campo magnético. Esse tipo de resultado pode ser observado em outros trabalhos envolvendo a matéria de quarks em densidades elevadas e temperatura nula [118, 122, 123] e também em temperatura finita [124]. Os resultados destes trabalhos concordam qualitativamente com o que verificamos para o caso $G_V = 0$, conforme o campo magnético torna-se mais intenso a anisotropia nas pressões torna-se maior. É interessante observar que no modelo de NJL com dois sabores sem a presença da interação vetorial o valor da pressão perpendicular nunca excede aquele apresentado pela pressão paralela. Esse aspecto da magnetização no modelo NJL SU(2) difere do apresentado em sua versão SU(3), no qual mesmo sem o efeito do acoplamento vetorial a pressão perpendicular excede a pressão paralela, como verificado em [118]. Ainda em comparação com [118], podemos dizer que as descontinuidades na pressão perpendicular são semelhantes em ambas as versões do modelo de NJL com dois e três sabores; ou seja a intensidade dos saltos descontínuos aumenta com B . Os saltos descontínuos no modelo NJL SU(2) sempre ocorrem aos pares e no modelo com três sabores sempre em ternas. Além disso, para campos mais intensos a pressão perpendicular torna-se negativa. Ao estabelecermos $G_V > 0$, vemos que a pressão perpendicular modifica-se de maneira semelhante ao verificado para a densidade de magnetização. Aparecem as descontinuidades associadas ao comportamento da derivada de ρ_f e também percebemos que em alguns pontos a pressão perpendicular supera em valor a pressão paralela.

A intensidade da pressão paralela para todo o intervalo de valores de B vai decrescendo conforme a magnitude do acoplamento vetorial fica maior. Por outro lado, a intensidade da pressão perpendicular oscila com o campo magnético com período dependente de B . O padrão periódico das oscilações é pouco modificado pela inclusão de G_V de modo que observa-se apenas um deslocamento das posições de máximos

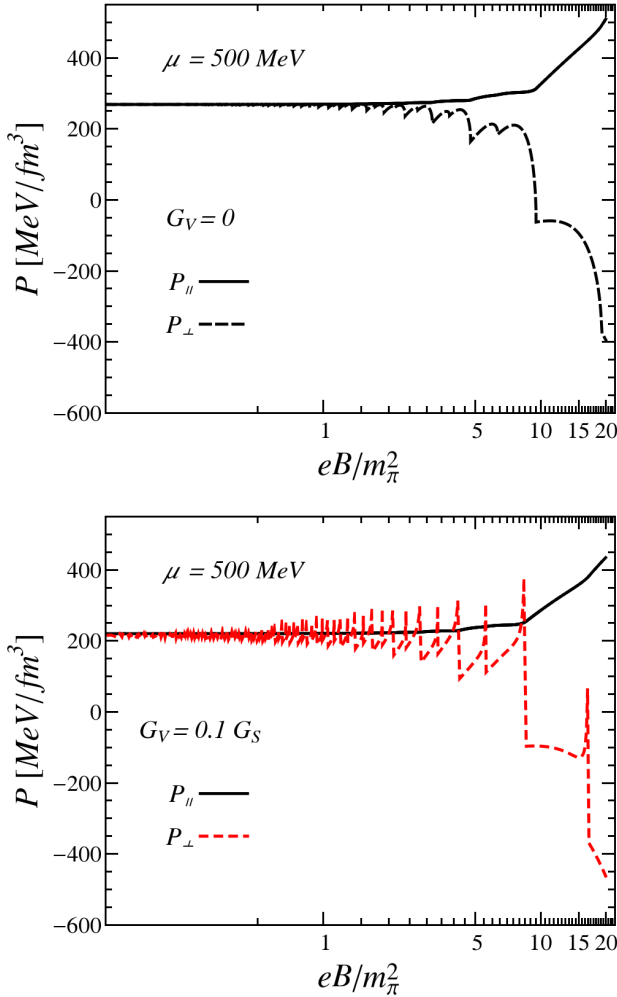


Figura 6.4: Comparação entre os valores determinados para as pressões paralela e perpendicular em função do campo magnético B para diferentes valores da constante de acoplamento G_V com potencial químico $\mu = 500 \text{ MeV}$.

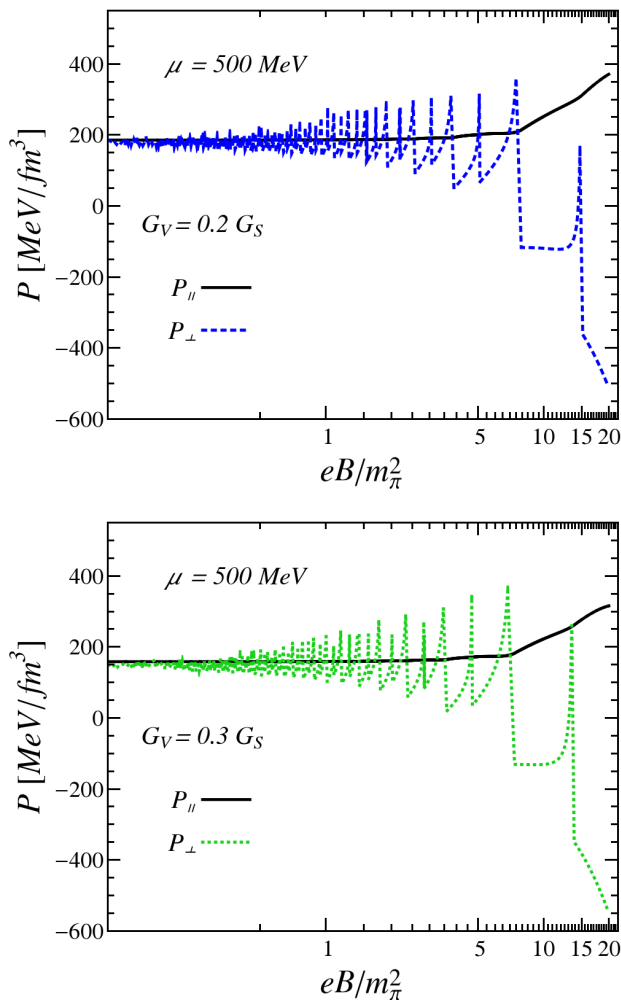


Figura 6.5: Comparação entre os valores determinados para as pressões paralela e perpendicular em função do campo magnético B para diferentes valores da constante de acoplamento G_V com potencial químico $\mu = 500 \text{ MeV}$.

e mínimos quando comparamos os respectivos casos.

Outro aspecto a considerar no cálculo das magnetizações diz respeito a sua dependência em função da densidade do meio. Na Fig.(6.6) ilustramos como \mathcal{M} varia com esta quantidade sob diferentes valores da constante de acoplamento vetorial para um valor fixo de campo magnético: $eB = 2.0 m_\pi^2$.

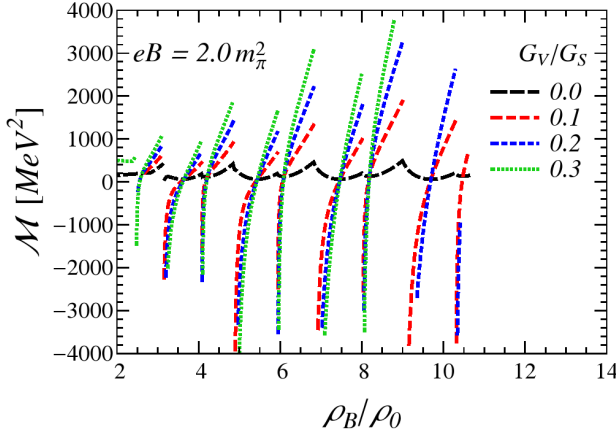


Figura 6.6: Valores de densidade de magnetização em função da densidade da matéria para diferentes valores de G_V sob campo magnético constante $eB = 2.0 m_\pi^2$.

Quando a interação vetorial está ausente e $G_V = 0$ percebemos que os valores de magnetização oscilam com a densidade de maneira regular, apresentando valores positivos em todo o intervalo de ρ_B/ρ_0 mostrado. As cúspides sempre aparecem aos pares em virtude das cargas distintas dos quarks up e down. Ao submeter o sistema a um valor não nulo de G_V , verificamos que novamente aparecem pontos de descontinuidade para alguns valores específicos de ρ_B/ρ_0 . Tais descontinuidades apresentam-se em intervalos aproximadamente regulares, seguindo o mesmo padrão determinado pelo caso onde $G_V = 0$. De maneira similar aos comentários anteriores, quando $G_V > 0$, a magnetização deve oscilar descontinuamente entre valores positivos e negativos. Ao escolher outros valores de campo magnético para traçar este último gráfico devemos identificar um comportamento semelhante da magnetização em função da densidade.

Calculando a razão P_\perp/P_\parallel entre as pressões perpendicular e paralela para um determinado intervalo de densidades, vemos que a anisotropia nas pressões também varia, mesmo para B constante, como

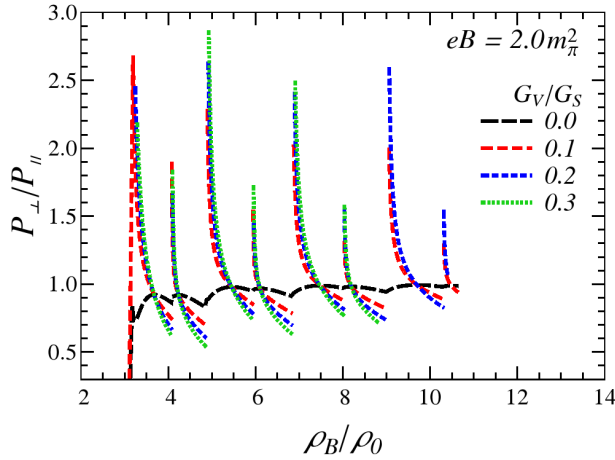


Figura 6.7: Variação da razão entre as pressões perpendicular e paralela em função da densidade do meio sob campo magnético $eB = 2.0 m_{\pi}^2$ e magnitudes distintas de G_V .

pode ser visto na Fig.(6.7). Analisando o caso $G_V = 0$, concluímos que a razão entre as pressões sempre é menor que a unidade e que a anisotropia descrece com o aumento da densidade. Um resultado semelhante foi obtido na referência [120] para um gás fermiônico sujeito a um campo magnético intenso. Por outro lado, com a influência do acoplamento $G_V > 0$, verificamos que a pressão perpendicular pode tornar-se muito maior para alguns valores de densidade e o padrão descontínuo aparece novamente. Para outros valores de campo magnético também são determinados resultados que se assemelham ao mostrado na Fig.(6.7). Podemos notar que quando $G_V = 0$, a razão entre as pressões $P_{\perp}/P_{\parallel} \sim 1$ em densidades mais altas. Isso ocorre porque ao aumentar a densidade torna-se necessário usar uma energia maior para acrescentar novas partículas e deve sobrar menos energia para magnetizar o sistema.

O termo $\mu\rho$ na expressão $P = -\varepsilon + Ts + \mu\rho + B\mathcal{M}$ torna-se mais relevante que o termo $B\mathcal{M}$ e assim a diferença entre as pressões paralela e perpendicular deve ser reduzida quando a densidade aumenta. Ao estabelecer um valor não nulo para G_V , produzimos um deslocamento nos valores de potencial químico em virtude da repulsão vetorial, o que contribui para aumentar a anisotropia nas pressões. Enquanto a ação do campo magnético é isotrópica, a repulsão vetorial atua igualmente

em todas as direções do espaço.

Através de simulações na rede é possível determinar a magnetização da matéria de quarks diretamente usando as equações da QCD. Com a discretização do problema na rede, o campo magnético não deve apresentar qualquer valor, mas torna-se quantizado em virtude da geometria toroidal usada nestas simulações. Como resultado destes cálculos na rede [125] conclui-se que, em temperatura nula e potencial químico próximo a zero, a matéria de quarks e glúons deve apresentar uma assinatura paramagnética. Um outro cálculo na rede [126] em temperatura finita também demonstrou tal característica para a suscetibilidade magnética. Ou seja, na QCD, quando o campo magnético aumenta a magnetização é positiva e também cresce. Esse comportamento também é verificado [127] pelo modelo hadrônico HRG (*Hadron Resonance Gas*). Independentemente, utilizando uma forma fechada para a pressão de um gás de quarks em um campo magnético também foi observado este resultado paramagnético tanto em potencial químico nulo [128], quanto em potencial químico finito [129]. Neste trabalho, utilizamos o modelo efetivo de NJL e sem a interação vetorial em $T = 0$ e μ finito, verificamos que a matéria densa de quarks também é de natureza paramagnética. Além disso, pela inserção da interação vetorial verificamos que o diamagnetismo também é possível, pelo menos para $T = 0$ e μ finito.

6.5 Equações de Estado Anisotrópicas

Em algumas aplicações é interessante estabelecer uma equação de estado termodinâmica por meio da qual seja possível descrever os estados da matéria dados os valores das variáveis de estado. Já citamos anteriormente que a descrição de objetos estelares compactos, como as estrelas de nêutrons e magnetares, requer como ponto de partida uma equação de estado para a determinação de seus parâmetros estruturais. Algumas dessas estrelas densas exibem campos magnéticos bastante intensos, os quais devem afetar a dinâmica microscópica de modo a alterar significativamente o comportamento termodinâmico. Em suma, a presença de um campo magnético intenso nesses objetos estelares deve influenciar indiretamente seu tamanho e composição. No capítulo 1 mencionamos que atualmente conjectura-se sobre a possibilidade de existirem estrelas compactas cuja estrutura seja sustentada por um caroço de quarks desconfinados. Assim, as observações experimentais desse tipo de objeto astronômico poderiam ser confirmadas segundo estimativas teóricas para a massa e raio que devem possuir. Diversos

trabalhos têm sido publicados ao longo dos últimos anos [83, 119, 111, 122, 49, 130] com o objetivo de estabelecer a influência desses campos magnéticos intensos na estrutura estelar. O campo magnético em uma estrela compacta não é constante e nem uniforme e sua descrição consiste em uma tarefa bastante complexa como pode ser visto nas referências [131, 132].

Portanto, espera-se que a consideração de pressões anisotrópicas na equação de estado da matéria estelar pode apresentar grande relevância no cálculo estrutural desses objetos. Recentemente, tais efeitos anisotrópicos foram avaliados na referência [118] para o modelo SU(3) de NJL sob condições mais realistas para o equilíbrio estelar, pela inclusão do quark estranho e também do decaimento β . Nossos resultados aqui no modelo SU(2) de NJL pretendem apenas mostrar simplifcadamente como a interação vetorial deve afetar a equação de estado anisotrópica da matéria de quarks magnetizada. Nas Figs.(6.8,6.9,6.10,6.11,6.12,6.13) mostramos os resultados numéricos determinados para as equações de estado anisotrópicas pela aplicação do modelo de NJL para dois sabores na presença do campo magnético B e interação vetorial de acoplamento G_V .

Analisando as figuras que mencionamos, podemos notar como as pressões tornam-se distintas e que ambas as pressões estão sujeitas as oscilações de De Haas-van Alphen. Aqui novamente a componente perpendicular da pressão apresenta descontinuidades de forma análoga ao obtido para as magnetizações. No caso da pressão paralela, percebe-se imediatamente que o aumento de G_V “enrijece” a equação de estado; ou seja, conforme a repulsão vetorial se intensifica, a pressão P_{\parallel} cresce para um dado valor de densidade de energia ε . Esse efeito ocorre em todos os valores de campo magnético e já foi verificado em diversos outros trabalhos [133].

Comparando os resultados da equação de estado para diferentes valores do campos magnético, notamos que a pressão perpendicular assume valores negativos em alguns pontos. Na referência [134] os autores discutem o problema da anisotropia magnética na matéria de quarks usando o modelo SU(3) de NJL na presença da interação vetorial e iso-vetorial em uma abordagem mais ampla do que a apresentada aqui. Inclusive consideram o efeito provocado por um potencial gluônico no cálculo dos observáveis termodinâmicos.

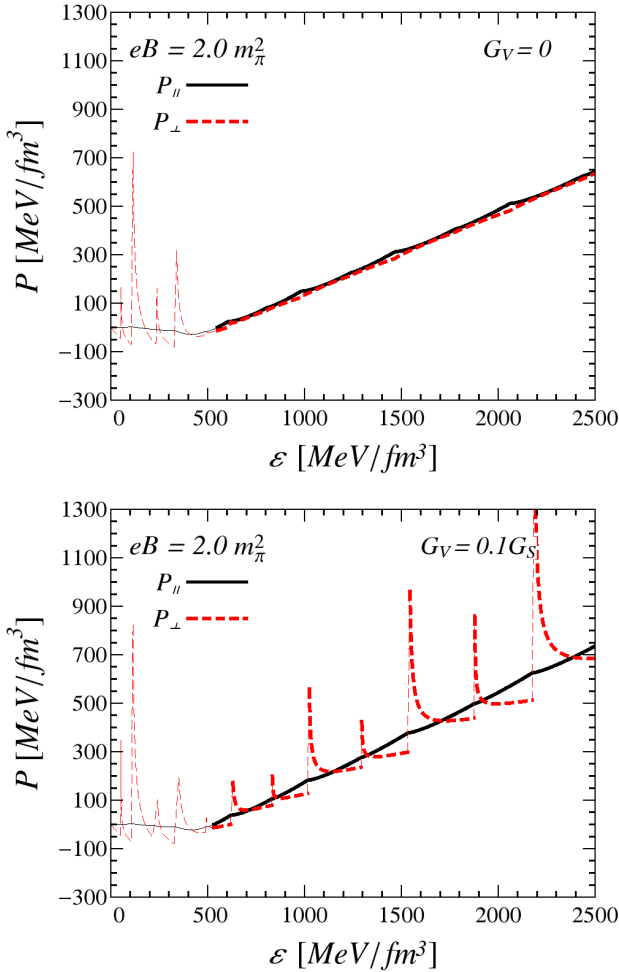


Figura 6.8: Equações de estado determinadas pelas pressões paralela e perpendicular sob um campo magnético de $eB = 2 m_\pi^2$. Na sequência de gráficos apresentamos os resultados determinados para diferentes magnitudes de acoplamento vetorial G_V . As linhas mais finas representam as soluções instáveis.

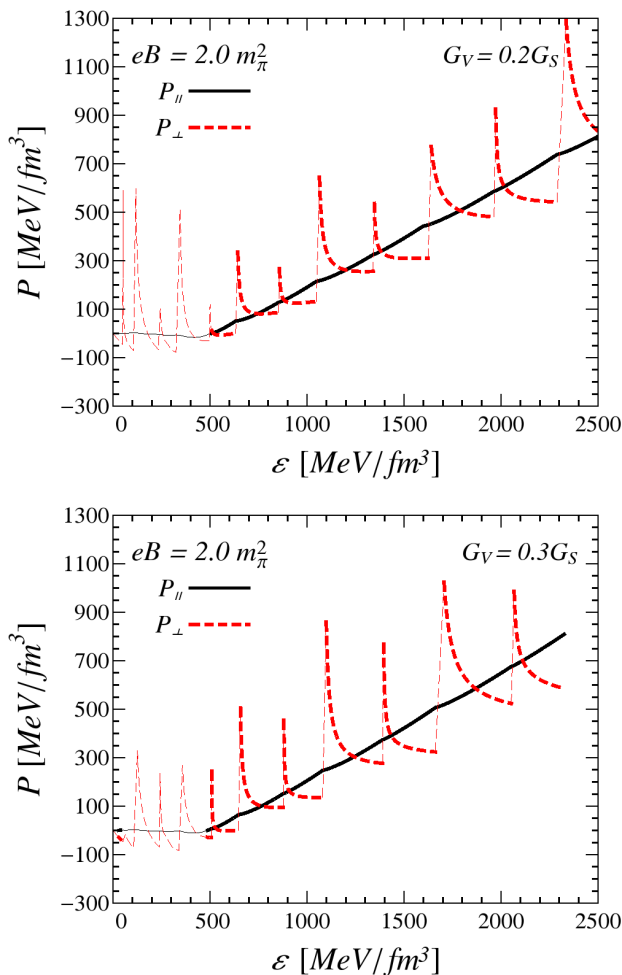


Figura 6.9: Equações de estado determinadas pelas pressões paralela e perpendicular sob um campo magnético de $eB = 2 m_\pi^2$. Na sequência de gráficos apresentamos os resultados determinados para diferentes magnitudes de acoplamento vetorial G_V . As linhas mais finas representam as soluções instáveis.

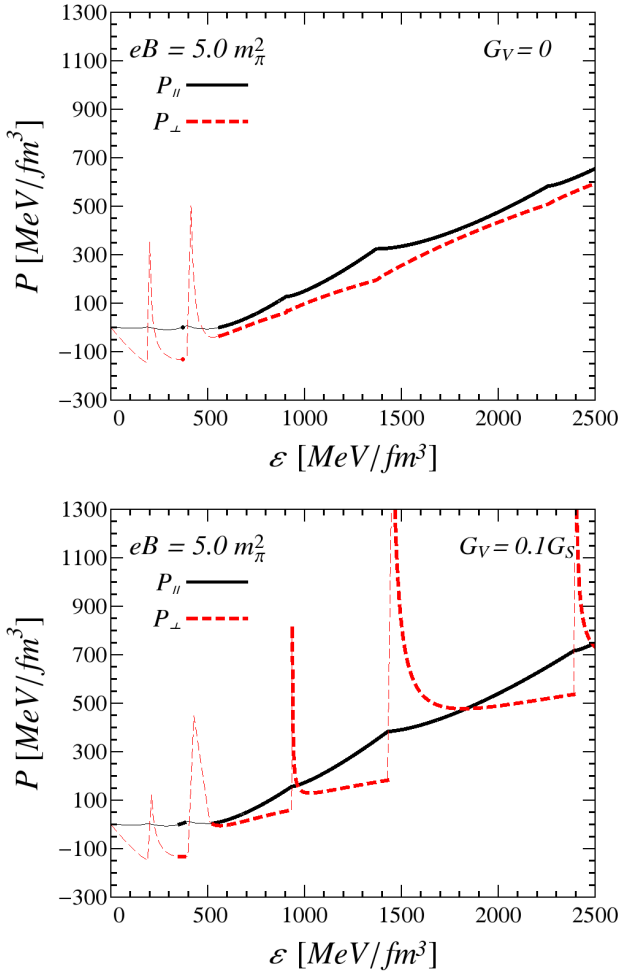


Figura 6.10: Equações de estado determinadas pelas pressões paralela e perpendicular sob um campo magnético de $eB = 5 m_\pi^2$. Na sequência de gráficos apresentamos os resultados determinados para diferentes magnitudes de acoplamento vetorial G_V . As linhas mais finas representam as soluções instáveis.

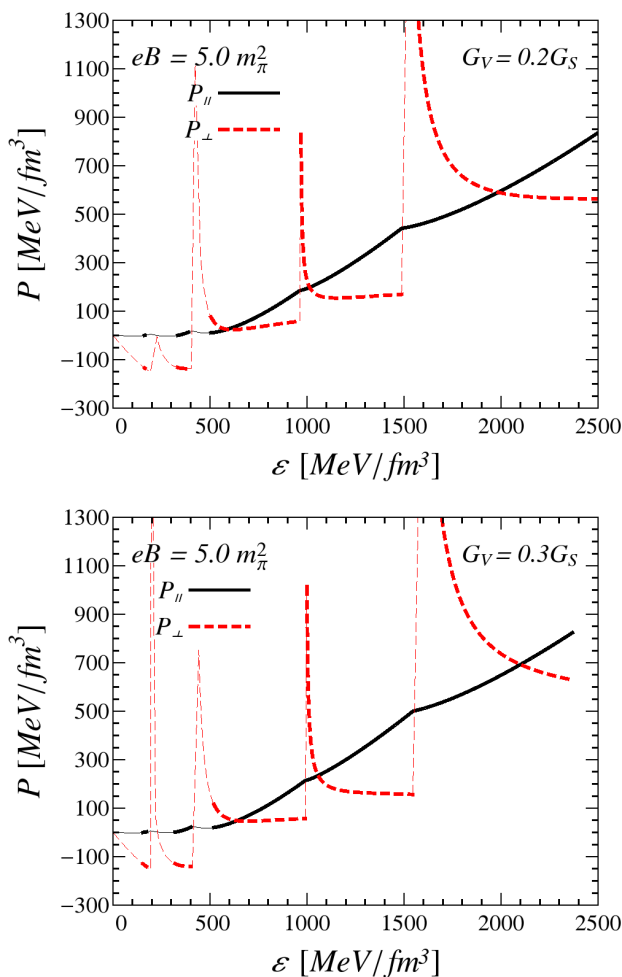


Figura 6.11: Equações de estado determinadas pelas pressões paralela e perpendicular sob um campo magnético de $eB = 5 m_\pi^2$. Na sequência de gráficos apresentamos os resultados determinados para diferentes magnitudes de acoplamento vetorial G_V . As linhas mais finas representam as soluções instáveis.

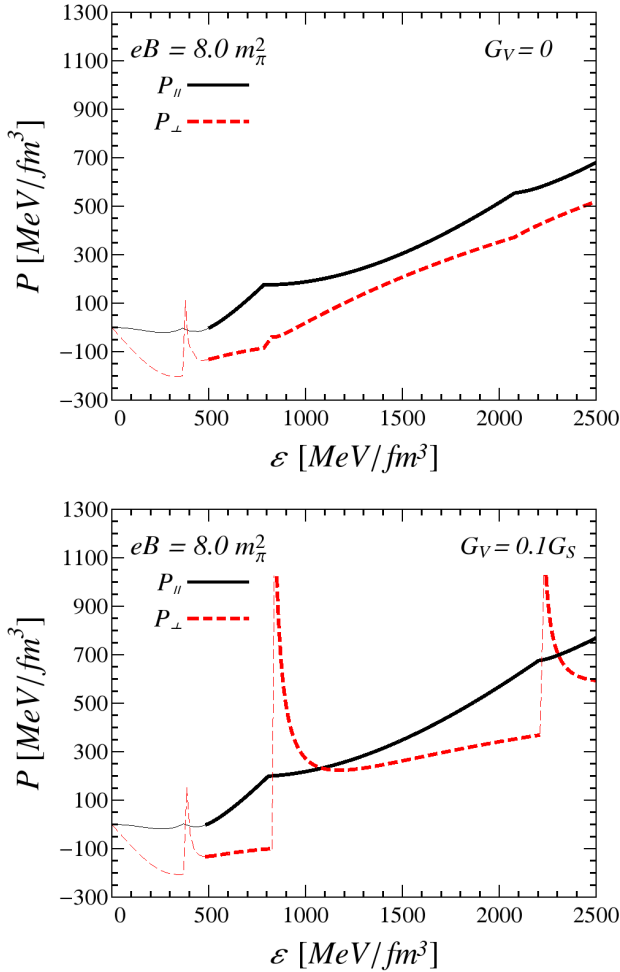


Figura 6.12: Equações de estado determinadas pelas pressões paralela e perpendicular sob um campo magnético de $eB = 8 m_\pi^2$. Na sequência de gráficos apresentamos os resultados determinados para diferentes magnitudes de acoplamento vetorial G_V . As linhas mais finas representam as soluções instáveis.

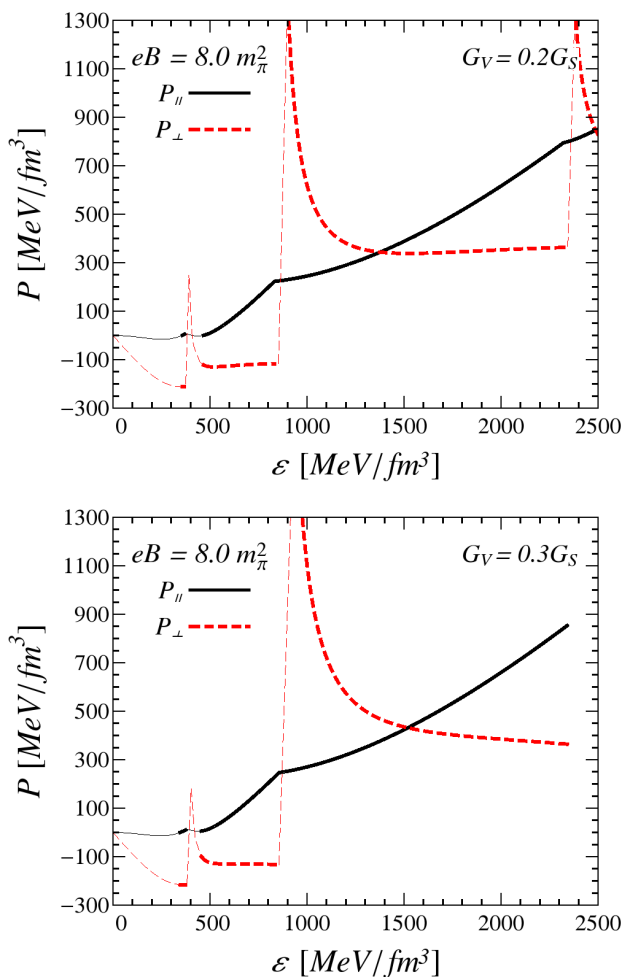


Figura 6.13: Equações de estado determinadas pelas pressões paralela e perpendicular sob um campo magnético de $eB = 8 m_\pi^2$. Na sequência de gráficos apresentamos os resultados determinados para diferentes magnitudes de acoplamento vetorial G_V . As linhas mais finas representam as soluções instáveis.

6.6 Estabilidade da Matéria de Quarks em Campo Magnético Finito e $G_V > 0$

As magnetizações obtidas pelas expressões desenvolvidas aqui nos permitem calcular a densidade de energia ε , como vimos. Dessa maneira, torna-se possível verificar o comportamento da energia por bárion ε/ρ_B para a matéria de quarks magnetizada. Na Fig.(6.14) mostramos como a ação do campo magnético promove a matéria para estados cada vez mais ligados; ou seja, a energia por nucleon diminui conforme B aumenta como já verificado na referência [83]. Para a matéria nuclear, o núclídeo mais estável ³ é o ^{56}Fe , que apresenta uma energia por nucleon de aproximadamente $E/A = \varepsilon/\rho_B \simeq 930 \text{ MeV}$. Em comparação com o valor da energia por nucleon na matéria nuclear a magnitude de ε/ρ_B é maior. Isso significa que a matéria nuclear é mais fortemente ligada que a matéria de quarks magnetizada e portanto, numa estrela de nêutrons este não seria o estado fundamental.

O efeito provocado pela introdução da interação vetorial basicamente torna a matéria de quarks mais fracamente ligada devido à repulsão, de modo que ε/ρ_B vai crescendo quando G_V fica maior. Nestes resultados podemos perceber que devido às oscilações introduzidas pelo campo magnético, a variação no valor de G_V faz com que o estado fundamental flutue entre diferentes densidades. Por exemplo, quando o campo magnético é $eB = 2m_\pi^2$, vemos que quando G_V é nulo ou pequeno a densidade preferencial fica no intervalo $\rho_B \simeq 2 - 3\rho_0$. Temos um mínimo global nessa região de densidade e um mínimo local na densidade zero. Nessas condições, o estado de vácuo corresponde a um estado metável do sistema [83]. Quando G_V excede o valor de $0.3G_S$, verificamos que a energia de ligação agora apresenta um mínimo global na densidade nula. Quando estas duas densidades coexistem na transição de um valor de densidade estável para o outro, temos a formação de bolhas de vácuo na matéria de quarks e vice-versa se G_V se reduz.

Para o caso quando temos $eB = 5m_\pi^2$, pode também aparecer uma densidade intermediária que compete com a densidade mais alta e a mais baixa. Conforme G_V varia, têm-se o sistema de quarks mais fortemente ligado quando se apresenta em uma dessas densidades. Para um determinado valor de G_V é então possível que haja a

³Na verdade, o núcleo mais fortemente ligado é o ^{62}Ni . No entanto, considerando as condições de temperatura e pressão nas estrelas de nêutrons acredita-se que deve existir um processo de fotodesintegração que transmuta os núcleos de níquel em núcleos de ferro, sendo este o mais estável então.

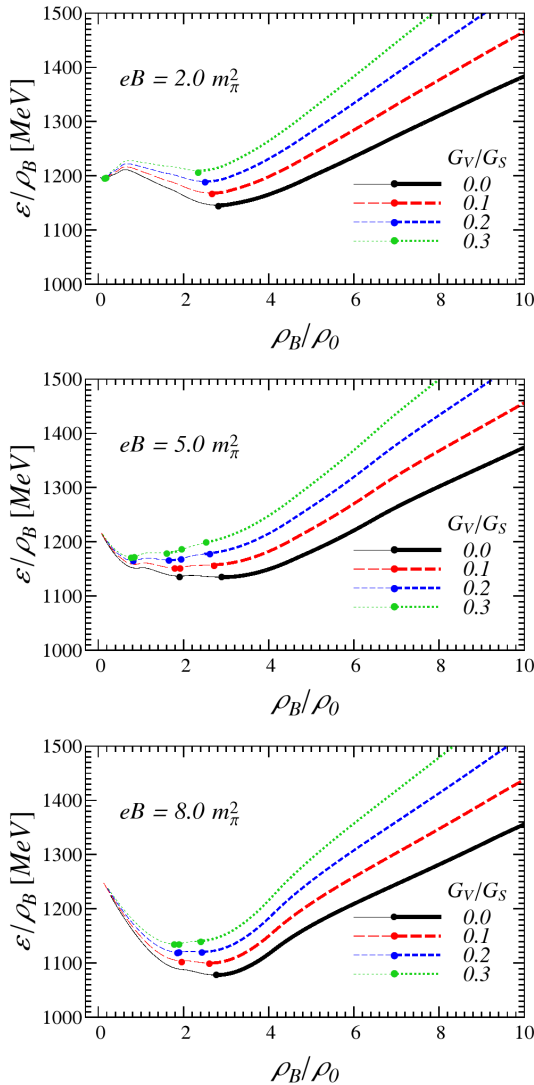


Figura 6.14: Efeito do acoplamento vetorial na energia de ligação associada à matéria magnetizada de quarks sob diferentes valores de campo magnético. Aqui as linhas mais finas representam soluções termodinamicamente e/ou mecanicamente instáveis da equação do gap.

coexistência de três densidades ou fases simultâneas, comportamento que segue as prescrições que já estabelecemos no capítulo anterior para o desdobramento em fases múltiplas.

6.7 Considerações Finais

Verificamos ao longo da nossa discussão neste capítulo os efeitos proporcionados pela anisotropia nas pressões em virtude da aplicação do campo magnético à matéria de quarks. Estudamos especificamente qual o papel desempenhado pela presença da interação vetorial na magnetização induzida no sistema e concluímos que essa contribuição abre a possibilidade de um comportamento diamagnético da matéria de quarks. Essa característica diamagnética é interessante pois segundo as simulações da rede realizadas até agora, somente há previsão para um comportamento paramagnético da matéria de quarks. Como vimos, resultados similares mostrando esse caráter diamagnético foram também obtidos no modelo NJL com três sabores sem G_V , e isso mostra que tal diamagnetismo, apesar de não ter sido observado na rede até o momento pode ser possível.

Capítulo 7

Conclusões

Neste trabalho estudamos os principais aspectos teóricos relativos as propriedades assumidas pelo diagrama de fases da QCD. Usando o modelo SU(2) de NJL para efetivamente simular a interação forte entre os quarks mediada pelos glúons na QCD, obtivemos as propriedades termodinâmicas de transição da fases hadrônica quando a matéria é submetida a extremas condições de temperatura e densidade. Em particular, discutimos extensivamente os efeitos produzidos pela consideração de um canal vetorial repulsivo na lagrangiana e a ação de campos magnéticos externos.

Pelo estudo da influência de uma interação de acoplamento vetorial no modelo de NJL, fomos capazes de mostrar o aparecimento de múltiplos pontos críticos no diagrama de fases em um regime de acoplamento forte e pequenas massas dos quarks. Enquanto um aumento na constante de acoplamento escalar G_S reforça a região de primeira ordem no diagrama de fases, um aumento no acoplamento vetorial enfraquece esta linha de coexistência. Sob valor de G_V nulo e forte acoplamento G_S o diagrama de fases torna-se dominado pela linha de primeira ordem. Ao estabelecer valores não nulos para o acoplamento vetorial G_V encontramos um encolhimento dessa região de primeira ordem e a emergência de dois pontos críticos para massas não físicas dos quarks. Além disso, verificamos a validade do cenário de *back-bending* da superfície crítica na versão SU(2) do modelo de NJL

pela introdução deste canal de interação vetorial. Quando as massas dos quarks aumentam e aproximam-se de seus valores físicos observamos o consequente desaparecimento do ponto crítico não físico. O ponto restante persiste em massas maiores e ainda confirma o cenário atual da possível existência de um ponto crítico físico no diagrama de fases. Os resultados obtidos na aproximação de campo médio no modelo de NJL sob a ação de interações vetoriais também foram comparados com a expansão não perturbativa OPT no modelo NJL.

A outra parte do nosso trabalho discutiu a influência de um campo magnético externo no diagrama de fases em contraste com a repulsão provocada por um acoplamento vetorial. Em potencial químico zero observamos o resultado bem conhecido da Catálise Magnética. A Catálise Magnética não é afetada pela interação vetorial nesta região de $\mu = 0$. Nossa análise concorda com estudos anteriores de teoria de campo efetiva mostrando uma temperatura pseudo crítica crescente conforme o campo magnético é elevado. No entanto, esta conclusão difere de cálculos na rede para a mesma quantidade. Porém, já é possível extrair pelo modelo NJL resultados analíticos coerentes com a rede podem ser obtidos assumindo uma constante de acoplamento, $G_S(B)$, dependente do campo externo, como discutido.

Em valores finitos de potencial químico, no entanto, a interação vetorial desempenha um papel importante, modificando a restauração da simetria quiral. O mecanismo da Catálise Magnética Inversa é observado em um meio denso, com o campo magnético favorecendo a fase quiralmente restaurada. A inserção do acoplamento vetorial leva todo o contorno de fases para valores mais altos de potencial químico e favorece a fase quebrada. No entanto, o fenômeno da Catálise Magnética Inversa não pode ser anulado pela repulsão vetorial, mesmo para valores mais altos de G_V .

O campo magnético reforça a linha de transição de primeira ordem como vimos e a interação vetorial repulsiva tem o efeito de encolhimento dessa região de coexistência. Entretanto, estas influências não são exatamente opostas e a interação vetorial não pode cancelar o efeito do campo magnético. Isto ocorre apenas parcialmente em temperatura zero.

Na região de transição de primeira ordem, a coexistência de duas densidades diferentes na mesma temperatura é modificada pela aplicação de um fluxo magnético externo. Em valores elevados de B , a diferença de densidade entre as fases coexistentes aumenta em comparação com o caso onde o campo está ausente. Por outro lado, para certos valores menores de B , o preenchimento dos níveis

de Landau torna essa diferença menor do que no caso $B = 0$, $G_V = 0$. O efeito global do acoplamento vetorial sozinho é sempre encolher a região de coexistência de primeira ordem no diagrama $T - \rho$. A aplicação do campo magnético conjuntamente a consideração da interação vetorial produz basicamente uma condição intermediária dependendo dos valores assumidos por B e G_V .

Estes resultados podem ter consequências importantes para a dinâmica das transições de fases de primeira ordem na matéria fortemente interagente. Por exemplo, a tensão superficial entre duas fases coexistentes depende da diferença entre os valores numéricos de cada densidade [100]. Portanto, na presença de campos magnéticos baixos ($B < 5m_\pi^2/e$) o valor da tensão superficial oscila com B , como já verificado [101].

Na sequência estudamos mais atentamente como ocorre a restauração da simetria quiral ao solucionar as equações de *gap* para o sistema de quarks magnetizado em G_V não nulo. Concluímos que deve ocorrer um desdobramento de fases magnetizadas em diferentes densidades e no modelo aqui estudado isso torna-se aparente em virtude da interação vetorial. A repulsão provocada por G_V tende a estabilizar soluções de massa das equações de *gap* antes instáveis mecanicamente e/ou termodinamicamente. Tal desdobramento acrescenta novas linhas de transição de primeira ordem ao diagrama de fases determinando a coexistência dual (coexistência de duas densidades na mesma pressão) entre diferentes estados magnetizados.

Além desse fenômeno, descobrimos que sob determinadas combinações paramétricas de B e G_V torna-se possível a ocorrência de fases múltiplas de três e até quatro (apenas em $T = 0$) fases coexistentes simultaneamente para a matéria de quarks. Verificamos que nestas condições existe a possibilidade de existência de pontos triplos no diagrama de fases. Ao explorar as combinações de B e G_V que resultam em coexistência múltipla, mostramos que há um padrão oscilatório do tipo de De Haas-van Alphen relacionando este par de parâmetros. Também demonstramos que no diagrama de fases $P-T$ para a interação forte podem aparecer linhas de coexistência relacionadas à condição $\partial P/\partial T < 0$, a qual também ocorre em sistemas moleculares como a água. Isso demonstra que existe uma similaridade entre o termo repulsivo G_V na interação entre os quarks e a repulsão do potencial de Lennard-Jones nos sistemas moleculares. Aqui não realizamos nenhum estudo referente ao modelo SU(3) de NJL; no entanto, podemos adiantar que esse desdobramento de fases magnéticas com três sabores não deve necessitar da presença de G_V para ocorrer neste caso, pois o

aumento no número de graus de liberdade causa o mesmo efeito.

Realizamos também a análise da interação vetorial na anisotropia de pressões da matéria de quarks magnetizada. Por meio do cálculo das respectivas magnetizações confirmamos que para G_V nulo a matéria de quarks tem uma assinatura paramagnética em potencial químico finito e temperatura zero. Sob um valor não nulo de G_V obtivemos também condições de estabilidade para um comportamento diamagnético. Como a interação vetorial produz um deslocamento no potencial químico isso torna possível que a energia livre ainda permaneça um mínimo para valores negativos de magnetização. Adicionalmente, obtivemos as equações de estado anisotrópicas nas condições citadas. O cálculo das magnetizações também nos permitiu determinar o comportamento da energia por nucleon para a matéria de quarks magnetizada sob diferentes valores de acoplamento G_V . Os resultados que encontramos para a energia por nucleon corroboram as hipóteses sobre o desdobramento de fases magnetizadas e a coexistência múltipla que introduzimos no capítulo 5.

Para dar continuidade ao estudo iniciado aqui, existem vários caminhos que podem gerar trabalho futuros. Uma possibilidade óbvia seria estender a análise das interrelações entre B e G_V para um modelo mais realista para a matéria de quarks. Alguns trabalhos já foram publicados neste contexto [134, 135] e devem existir ainda aspectos importantes no âmbito do diagrama de fases da QCD que não foram explorados até agora. Uma extensão ao trabalho sobre a anisotropia no modelo de NJL, seria a inclusão do momento magnético anômalo, como já feito com outros modelos [120]. O estudo da anisotropia em temperatura finita usando o modelo de NJL (ou PNJL) poderia fornecer resultados interessantes no contexto das colisões de íons pesados. A obtenção de velocidades do som e viscosidades anisotrópicas poderia ser comparada a estudos em hidrodinâmica relativística atribuídos ao fluxo elíptico. Outra questão interessante seria avaliar os efeitos determinados pela anisotropia no efeito magnético quiral [136, 73] pelo cálculo de resistividades e correntes carregadas no plasma de quarks e glúons.

Referências Bibliográficas

- [1] Bernard, C. et al, *High temperature QCD with three flavors of improved staggered quarks* *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **119** (2003) 523, [arXiv:hep-lat/0209079](#).
- [2] Bernard, C. et al, *QCD thermodynamics with three flavors of improved staggered quarks* *Phys.Rev.* **D71** (2005) 034504, [arXiv:hep-lat/0405029](#).
- [3] Halzen, F. e Martin, A.D., *Quarks and leptons: an introductory course in modern particle physics*. Wiley, 1984. <http://books.google.com.br/books?id=zwDvAAAAAAAJ>.
- [4] Chodos, A., Jaffe, R. L., Johnson, K., Thorn, C. B. e Weisskopf, V. F., *New extended model of hadrons* *Phys.Rev.* **D9** (1974) 3471.
- [5] Olive, K.A. e Particle Data Group, *Review of Particle Physics Chinese Physics C* **38** no. 9, (2014) 090001. <http://stacks.iop.org/1674-1137/38/i=9/a=090001>.
- [6] Fukugita, M. e Ukawa, A., *Deconfining and chiral transitions of finite-temperature quantum chromodynamics in the presence of dynamical quark loops* *Phys. Rev. Lett.* **57** (1986) 503.
- [7] Aoki, Y., Fodor, Z., Katz, S.D. e Szabo, K.K., *The QCD transition temperature: Results with physical masses in the continuum limit* *Phys. Lett.* **B643** (2006) 46, [arXiv:hep-lat/0609068](#).

- [8] Mócsy, Ágnes and Sannino, Francesco and Tuominen, Kimmo, *Confinement versus Chiral Symmetry* *Phys. Rev. Lett.* **92** 182302.
- [9] Laermann, E. e Philipsen, O., *The Status of lattice QCD at finite temperature* *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **53** (2003) 163, [arXiv:hep-ph/0303042](#).
- [10] Karsch, F. e Laermann, E., *Thermodynamics and in medium hadron properties from lattice QCD* [arXiv:hep-lat/0305025](#).
- [11] Aoki, Y., Endrodi, G., Fodor, Z., Katz, S. D., Szabo, K. K., *The order of the quantum chromodynamics transition predicted by the standard model of particle physics* *Nature* **443** (2006) 675.
- [12] Scavenius, O., Mócsy, Á., Mishustin, I. N. e Rischke, D. H., *Chiral phase transition within effective models with constituent quarks* *Phys. Rev.* **C64** (2001) 045202.
- [13] Halasz, M. A., Jackson, A. D., Shrock, R. E., Stephanov, M. A. e Verbaarschot, J. J. M., *Phase diagram of QCD* *Phys. Rev.* **D58** (1998) 096007.
- [14] Ratti, C., Thaler, M. e Weise, W., *Phases of QCD: Lattice thermodynamics and a field theoretical model* *Phys. Rev.* **D73** (2006) 014019.
- [15] Cleymans, J., Oeschler, H., Redlich, K. e Wheaton, S., *Comparison of chemical freeze-out criteria in heavy-ion collisions* *Phys. Rev.* **C73** (2006) 034905.
- [16] Ivanenko, D. e Kurdgelaidze, D.F., *Remarks on quark stars* *Lettere Nuovo Cimento* **2** (1969) 13.
- [17] Broderick, A., Prakash, M. e Lattimer, J.M., *The equation of state of neutron star matter in strong magnetic fields* *Astrophys. J.* (2000) , [arXiv:astro-ph/0001537](#).
- [18] Shapiro, S.L. e Teukolsky, S.A., *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars*. Wiley, 2008. <http://books.google.com.br/books?id=d1CRQIcP1zoC>.
- [19] Itoh, N., *Hydrostatic equilibrium of hypothetical quark stars* *Prog. Theor. Phys.* **44** no. 1, (1970) 291.

- [20] Danzer, J., Gattringer C., Liptak L. e Marinkovic M., *A study of the sign problem for lattice QCD with chemical potential* *Phys. Lett.* **B682** (2009) 240, [arXiv:0907.3084](https://arxiv.org/abs/0907.3084).
- [21] Nambu, Y. e Jona-Lasinio, G., *Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. I* *Phys. Rev.* **122** (1961) 345.
- [22] Nambu, Y. e Jona-Lasinio, G., *Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. II* *Phys. Rev.* **124** (1961) 246.
- [23] Bardeen, J., Cooper, L. N. e Schrieffer, J. R., *Microscopic theory of superconductivity* *Phys. Rev.* **106** (1957) 162.
- [24] Cooper, L., *Bound electron pairs in a degenerate Fermi gas* *Phys. Rev.* **104** (1956) 1189.
- [25] Heisenberg, W., *Quantum Theory of Fields and Elementary Particles* *Rev. Mod. Phys.* **29** (1957) 269.
- [26] Weinberg, S., *High-Energy Behavior in Quantum Field Theory* *Phys. Rev.* **118** (1960) 838.
- [27] Dyson, F. J., *The S Matrix in Quantum Electrodynamics* *Phys. Rev.* **75** (1949) 1736.
- [28] Gross, D. e Neveu, A., *Dynamical symmetry breaking in asymptotically free field theories* *Phys. Rev.* **D10** (1974) 3235.
- [29] Klevansky, S. P., *The Nambu–Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics* *Rev. Mod. Phys.* **64** (1992) 649.
- [30] Fetter, A.L. e Walecka, J.D., *Quantum Theory of Many-Particle Systems*. Dover Books on Physics. Dover Publications, 2003. <http://books.google.com.br/books?id=0wekf1s83b0C>.
- [31] Kapusta, J.I. e Gale, C., *Finite-Temperature Field Theory: Principles and Applications*. Cambridge University Press, 2006. <http://books.google.com.br/books?id=r1l8dJ2iTp5C>.
- [32] Bailin, D. e Love, A., *Introduction to Gauge Field Theory*. Graduate student series in physics. Institute of Physics Pub., 1993. <http://books.google.com.br/books?id=A9MU9pvcEGQC>.

- [33] Buballa, M., *NJL model analysis of quark matter at large density* *Phys.Rep.* **407** (2005) 205, [arXiv:hep-ph/0402234](#).
- [34] Bellac, M.L., *Thermal Field Theory*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2000. http://books.google.com.br/books?id=00_x6GR8GXoC.
- [35] Inagaki, T., Kimura, D., Kohyama, H. e Kvinikhidze, A., *Phase diagram of Nambu-Jona-Lasinio model with dimensional regularization* *Phys. Rev.* **D86** (2012) 116013, [arXiv:1202.5220](#).
- [36] Gell-Mann, M, Oakes, R. J. e Renner, B., *Behavior of current divergences under $SU_3 \times SU_3$* *Phys. Rev.* **175** (1968) 2195.
- [37] Holstein B., *How large is F_π ?* *Phys. Lett.* **B244** (1990) 83.
- [38] Hagiwara, K. et al, *Review of Particle Properties* *Phys. Rev.* **D66** (2002) 010001.
- [39] Giusti L., Rapuano F., Talevi M. e Vladikas A., *The QCD chiral condensate from the lattice* *Nucl. Phys.* **B538** (1999) 249.
- [40] Dosch H. e Narison S., *Direct extraction of the chiral quark condensate and bounds on the light quark masses* *Phys. Lett.* **B417** (1998) 173.
- [41] Barducci, A., Casalbuoni, R., Pettini, G. e Gatto, R., *Chiral phases of QCD at finite density and temperature* *Phys. Rev.* **D49** (1994) 426.
- [42] Berges J. e Rajagopal K., *Color superconductivity and chiral symmetry restoration at nonzero baryon density and temperature* *Nucl. Phys.* **B538** (1999) 215, [arXiv:hep-ph/9804233](#).
- [43] Ginzburg, V.L. e Landau, L.D., *On the theory of superconductivity* *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **20** (1950) 1064.
- [44] Greiner W, Neise, L. e Stöcker, H., *Thermodynamics and Statistical Mechanics*. Classical Theoretical Physics Series. Springer-Verlag, 1995. <http://books.google.com.br/books?id=12DKsFtFTgYC>.

- [45] Engels, J., Fingberg, J., Redlich, K., Satz, H. and Weber, M., *The onset of deconfinement in $SU(2)$ lattice gauge theory* *Z. Phys.* **C42** (1989) 341.
- [46] Borsanyi, S. and Endrödi, G. and Fodor, Z. and Jakovac, A. and Katz, S. D. et al, $N_f = 2 + 1$ *flavour equation of state* [arXiv:1011.4229](#).
- [47] Kanaya, K., Aoki, S., Ohno, H., Umeda, T., Ejiri, S. et al, *Towards the equation of state in 2+1 flavor QCD with improved Wilson quarks in the fixed scale approach* *PoS LAT2009* (2009) 190, [arXiv:0910.5284](#).
- [48] Sarkar, S., Satz, H. e Sinha, B., *The Physics of the Quark-Gluon Plasma: Introductory Lectures*. Lecture Notes in Physics. Springer, 2009. <https://books.google.com.br/books?id=1WPVONSenZ4C>.
- [49] Menezes, D. P., Providencia, C. e Melrose, D. B., *Quark stars within relativistic models* *J. Phys.* **G32** (2006) 1081, [arXiv:astro-ph/0507529](#).
- [50] Bandyopadhyay, D., Chakrabarty, So. e Pal, S., *Quantizing magnetic field and quark-hadron phase transition in a neutron star* *Phys. Rev. Lett.* **79** (1997) 2176.
- [51] Bjorken, J. D., *Highly relativistic nucleus-nucleus collisions: The central rapidity region* *Phys. Rev.* **D27** (1983) 140.
- [52] Bazavov, A. et al, *Equation of state and QCD transition at finite temperature* *Phys. Rev.* **D80** (2009) 014504.
- [53] Braun-Munzinger, P. e Wambach, J., *The quest for the quark-gluon plasma* *Nature* **448** (2007) 302.
- [54] Ejiri, S., Karsch, F., Laermann, E. e Schmidt, C., *The isentropic equation of state of 2-flavor QCD* *Phys. Rev.* **D73** (2006) 054506, [arXiv:hep-lat/0512040](#).
- [55] Stephanov, M., Rajagopal, K. e Shuryak, E., *Signatures of the tricritical point in QCD* *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 4816.
- [56] Vuorinen, A. e Yaffe, L. G., *$Z(3)$ -symmetric effective theory for $SU(3)$ Yang-Mills theory at high temperature* *Phys. Rev.* **D74** (2006) 025011, [arXiv:hep-ph/0604100](#).

- [57] Forcrand, P. e Philipsen, O., *The chiral critical line of $N_f = 2+1$ QCD at zero and non-zero baryon density* *JHEP* no. 01, (2007) 077.
- [58] Fukushima, K., *Critical surface in hot and dense QCD with the vector interaction* *Phys. Rev.* **D78** (2008) 114019.
- [59] Bowman, E.S. e Kapusta, J., *Critical points in the linear sigma model with quarks* *Phys. Rev.* **C79** (2009) 015202, [arXiv:0810.0042](#).
- [60] Ferroni, L., Koch, V. e Pinto, M. B., *Multiple critical points in effective quark models* *Phys. Rev.* **C82** (2010) 055205, [arXiv:1007.4721](#).
- [61] Stevenson, P. M., *Optimized perturbation theory* *Phys. Rev.* **D23** (1981) 2916.
- [62] Denke, R., Macias, J. C. e Pinto, M. B., *Critical Line Back-Bending Induced either by Finite N_c Corrections or by a Repulsive Vector Channel* *J. Mod. Phys.* **4** (2013) 1583. <http://dx.doi.org/10.4236/jmp.2013.412195>.
- [63] Walecka, J.D., *A theory of highly condensed matter* *Annals of Phys.* **83** (1974) 491.
- [64] Walecka, J.D. e Serot, B. D., *The Relativistic Nuclear Many-Body Problem* *Adv. Nucl. Phys.* **16** (1986) 1.
- [65] Carignano, S., Nickel, D. e Buballa, M., *Influence of vector interaction and Polyakov loop dynamics on inhomogeneous chiral symmetry breaking phases* *Phys. Rev.* **D82** (2010) 054009.
- [66] Rapp, R., Schäfer, T., Shuryak, E. e Velkovsky, M., *Diquark Bose Condensates in High Density Matter and Instantons* *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 53.
- [67] Kashiwa, K., Hell, T. e Weise, W., *Nonlocal Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio model and imaginary chemical potential* *Phys. Rev.* **D84** (2011) 056010.
- [68] Lourenço, O., Dutra, M., Frederico, T., Delfino, A. e Malheiro, M., *Vector interaction strength in Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio models from*

- hadron-quark phase diagrams* *Phys. Rev.* **D85** (2012) 097504.
- [69] Bratovic, N., Hatsuda, T. e Weise, W., *Role of vector interaction and axial anomaly in the PNJL modeling of the QCD phase diagram* *Phys. Lett.* **B719** (2013) 131.
- [70] Steinheimer, J e Schramm, S., *Do lattice data constrain the vector interaction strength of QCD?* *Phys. Lett.* **B736** no. 0, (2014) 241.
- [71] Sugano, J., Takahashi, J., Ishii, M., Kouno, H. e Yahiro, M., *Determination of the strength of the vector-type four-quark interaction in the entanglement Polyakov-loop extended NambuJona-Lasinio model* *Phys. Rev.* **D90** (2014) 037901, [arXiv:1405.0103](#).
- [72] Restrepo, T. E., Macias, J. C., Pinto, M. B. e Ferrari, G. N., *Dynamical generation of a repulsive vector contribution to the quark pressure* *Phys. Rev.* **D91** (2015) 065017.
- [73] Kharzeev, D. E., McLerran, L. D. e Warringa, H. J., *The effects of topological charge change in heavy ion collisions: ‘Event by event P and CP violation’* *Nucl. Phys.* **A803** (2008) 227, [arXiv:0711.0950](#).
- [74] Kharzeev, D. E. e Son, D. T., *Testing the chiral magnetic and chiral vortical effects in heavy ion collisions* *Phys. Rev. Lett.* **106** (2011) 062301, [arXiv:1010.0038](#).
- [75] Skokov, V., Illarionov, A. Yu. e Toneev, V., *Estimate of the magnetic field strength in heavy-ion collisions* *Int. J. Mod. Phys.* **A24** (2009) 5925, [arXiv:0907.1396](#).
- [76] Bzdak, A. e Skokov, V., *Event-by-event fluctuations of magnetic and electric fields in heavy ion collisions* *Phys. Lett.* **B710** (2012) 171, [arXiv:1111.1949](#).
- [77] Tuchin, K., *Time and space dependence of the electromagnetic field in relativistic heavy-ion collisions* *Phys. Rev.* **C88** (2013) 024911, [arXiv:1305.5806](#).
- [78] Rubinstein H. R., *Magnetic Fields in the Early Universe* *Int. J. of Theor. Phys.* **38** (1999) 1315.

- [79] Ando S. e Kusenko A., *Evidence for Gamma-ray Halos Around Active Galactic Nuclei and the First Measurement of Intergalactic Magnetic Fields* *Astro. J. Lett.* **722** (2010) L39.
- [80] Preis, F., Rebhan, A. e Schmitt, A., *Inverse magnetic catalysis in field theory and gauge-gravity duality* [arXiv:1208.0536](#).
- [81] Landau, L., *Diamagnetismus der metalle* *Zeit. Phys.* **64** (1930) 629.
- [82] Fraga, E. S. e Mizher, A. J., *Chiral transition in a strong magnetic background* *Phys.Rev.* **D78** (2008) 025016, [arXiv:0804.1452](#).
- [83] Menezes, D.P., Pinto, M. B., Avancini, S.S., Perez Martinez, A. e Providencia, C., *Quark matter under strong magnetic fields in the Nambu-Jona-Lasinio Model* *Phys.Rev.* **C79** (2009) 035807, [arXiv:0811.3361](#).
- [84] Miransky, V.A. e Shovkovy, I.A., *Magnetic catalysis and anisotropic confinement in QCD* *Phys. Rev.* **D66** (2002) 045006, [arXiv:hep-ph/0205348](#).
- [85] Johnson, C. V. e Kundu, A., *External fields and chiral symmetry breaking in the Sakai-Sugimoto model* *JHEP* **0812** (2008) 053, [arXiv:0803.0038](#).
- [86] Sakai, T. e Sugimoto, S., *Low energy hadron physics in holographic QCD* *Prog. Theor. Phys.* **113** (2005) 843, [arXiv:hep-th/0412141](#).
- [87] D'Elia, M., Mukherjee, S. e Sanfilippo, F., *QCD Phase Transition in a Strong Magnetic Background* *Phys. Rev.* **D82** (2010) 051501, [arXiv:1005.5365](#).
- [88] Bali, G. S., Bruckmann, F., Endrödi, G., Fodor, Z., Katz, S.D. et al, *The QCD phase diagram for external magnetic fields* *JHEP* **1202** (2012) 044, [arXiv:1111.4956](#).
- [89] Fukushima, K. e Hidaka, Y., *Magnetic Catalysis Versus Magnetic Inhibition* *Phys. Rev. Lett.* **110** (2013) 031601.
- [90] Bruckmann, F., Endrödi, G. e Kovács, T., *Inverse magnetic catalysis and the Polyakov loop* *JHEP* **2013** (2013) .

- [91] Kojo, T. e Su, N., *The quark mass gap in a magnetic field* *Phys. Lett.* **B720** (2013) 192.
- [92] Fraga, E. S., Noronha, J. e Palhares, L. F., *Large N_c deconfinement transition in the presence of a magnetic field* *Phys. Rev.* **D87** (2013) 114014.
- [93] Farias, R. L. S., Gomes, K. P., Krein, G. I. e Pinto, M. B., *Importance of asymptotic freedom for the pseudocritical temperature in magnetized quark matter* *Phys. Rev.* **C90** (2014) 025203, [arXiv:1404.3931](https://arxiv.org/abs/1404.3931).
- [94] Avancini, S. S., Menezes, D. P., Pinto, M. B. e Providencia, C., *The QCD Critical End Point Under Strong Magnetic Fields* *Phys. Rev.* **D85** (2012) 091901, [arXiv:1202.5641](https://arxiv.org/abs/1202.5641).
- [95] Hass, W. J. e Alphen, P. M., *Oscillations of magnetization in bismuth in magnetic field* *Comm. Phys. Lab. Leiden* **212a** (1930) .
- [96] Bohr, N., *Studier over metallernes elektrontheori: Doktorafth.* V. Thaning & Appel, 1911. <http://books.google.com.br/books?id=OWKCQwAACAAJ>.
- [97] Van Leeuwen, H. J., *Problèmes de la théorie électronique du magnétisme* *J. Phys. Radium* **2** (1921) 361.
- [98] Ferrari, G. N., Garcia, A. F. e Pinto, M. B., *Chiral transition within effective quark models under magnetic fields* *Phys. Rev.* **D86** (2012) 096005, [arXiv:1207.3714](https://arxiv.org/abs/1207.3714).
- [99] Onsager, L., Hemmer, P.C., Holden, H. e Ratkje, S.K., *The Collected Works of Lars Onsager: With Commentary.* Series in 20th Century Physics. World Scientific Publishing Company, 1996. <http://books.google.com.br/books?id=5wv3-WxzWJ4C>.
- [100] Pinto, M. B., Koch, V. e Randrup, J., *The Surface Tension of Quark Matter in a Geometrical Approach* *Phys. Rev.* **C86** (2012) 025203, [arXiv:1207.5186](https://arxiv.org/abs/1207.5186).
- [101] Garcia, A. F. e Pinto, M. B., *Surface tension of magnetized quark matter* *Phys. Rev.* **C88** (2013) 025207, [arXiv:1306.3090](https://arxiv.org/abs/1306.3090).

- [102] Voronyuk, V., Toneev, V.D., Cassing, W., Bratkovskaya, E.L., Konchakovski, V.P. et al, *(Electro-)Magnetic field evolution in relativistic heavy-ion collisions* *Phys. Rev. C* **83** (2011) 054911, [arXiv:1103.4239](#).
- [103] Duncan, R. C. e Thompson, C., *Formation of very strongly magnetized neutron stars - Implications for gamma-ray bursts* *Astr. J.* **392** (June, 1992) L9–L13.
- [104] Kouveliotou, C. et al, *An X-ray pulsar with a superstrong magnetic field in the soft γ -ray repeater SGR1806 - 20* *Nature* **393** (1998) 235.
- [105] Klimenko, K.G., *Three-dimensional Gross-Neveu model in an external magnetic field* *Theor. Math. Phys.* **89** (1992) 1161.
- [106] Klimenko, K.G., *Three-dimensional Gross-Neveu model at nonzero temperature and in an external magnetic field* *Z. Phys.* **C54** (1992) 323.
- [107] Miransky, V.A., *Catalysis of dynamical symmetry breaking by a magnetic field* *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **123** (1996) 49, [arXiv:hep-th/9511224](#).
- [108] Gusynin, V. P., Miransky, V. A. e Shovkovy, I. A., *Catalysis of Dynamical Flavor Symmetry Breaking by a Magnetic Field in 2 + 1 Dimensions* *Phys. Rev. Lett.* **73** (1994) 3499.
- [109] Gusynin, V.P., Miransky, V.A. e Shovkovy, I.A., *Dimensional reduction and dynamical chiral symmetry breaking by a magnetic field in (3+1)-dimensions* *Phys. Lett.* **B349** (1995) 477, [arXiv:hep-ph/9412257](#).
- [110] Allen, P. G. e Scoccola, N. N., *Quark matter under strong magnetic fields in SU(2) NJL-type models: parameter dependence of the cold dense matter phase diagram* *Phys. Rev.* **D88** (2013) 094005, [arXiv:1309.2258](#).
- [111] Grunfeld, A. G. , Menezes, D. P., Pinto, M. B. e Scoccola, N. N., *Phase structure of cold magnetized quark matter within the SU(3) NJL model* *Phys. Rev.* **D90** (2014) 044024.
- [112] Denke, R. Z. e Pinto, M. B., *Influence of a repulsive vector coupling in magnetized quark matter* *Phys. Rev.* **D88** (2013) 056008.

- [113] Menezes, D. P. and Pinto, M. B. , Castro, L. B., Costa, P. e Providência, C., *Repulsive vector interaction in three-flavor magnetized quark and stellar matter* *Phys. Rev. C* **C89** (2014) 055207.
- [114] Klimenko, K.G., *Magnetic catalysis and oscillating effects in Nambu-Jona-Lasinio model at nonzero chemical potential* [arXiv:hep-ph/9809218](#).
- [115] Ebert, D., Klimenko, K. G., Vdovichenko, M. A. e Vshivtsev, A. S., *Magnetic oscillations in dense cold quark matter with four-fermion interactions* *Phys. Rev. D* **D61** (1999) 025005.
- [116] Allen, P. G., Pagura, V. P. e Scoccola, N. N., *Cold magnetized quark matter phase diagram within a generalized SU(2) NJL model* [arXiv:1502.00572](#).
- [117] Ferrer, E. J. , de la Incera, V. , Keith, J. P., Portillo, I. e Springsteen, P. L., *Equation of state of a dense and magnetized fermion system* *Phys. Rev. C* **C82** (2010) 065802.
- [118] Menezes, D. P., Pinto, M. B. e Providência, C., *Anisotropy in the EoS of Magnetized Quark Matter* [arXiv:1503.08666](#).
- [119] Menezes, D. P., Pinto, M. B., Avancini, S. S. e Providencia, C., *Quark matter under strong magnetic fields in the su(3) Nambu-Jona-Lasinio Model* *Phys. Rev. C* **C80** (2009) 065805, [arXiv:0907.2607](#).
- [120] Strickland, M., Dexheimer, V. e Menezes, D. P., *Bulk properties of a Fermi gas in a magnetic field* *Phys. Rev. D* **D86** (2012) 125032.
- [121] Huang, X., Huang, M., Rischke, D. H. e Sedrakian, A., *Anisotropic hydrodynamics, bulk viscosities, and r-modes of strange quark stars with strong magnetic fields* *Phys. Rev. D* **D81** (2010) 045015.
- [122] Dexheimer, V., Menezes, D.P. e Strickland, M., *The influence of strong magnetic fields on proto-quark stars* *J. Phys. G* **G41** (2014) 015203, [arXiv:1210.4526](#).
- [123] Jia-Xun, H.,Guang-Xiong, P., Cheng-Jun, X. e Jian-Feng, X., *Magnetized strange quark matter in a*

- mass-density-dependent model* *Chin. Phys.* **C39** no. 1, (2015) 015101. <http://stacks.iop.org/1674-1137/39/i=1/a=015101>.
- [124] Fayazbakhsh, S. e Sadooghi, N., *Anomalous magnetic moment of hot quarks, inverse magnetic catalysis, and reentrance of the chiral symmetry broken phase* *Phys. Rev. D* **D90** (2014) 105030.
- [125] Bali, G. S., Bruckmann, F., Endrödi, G. e Schäfer, A., *Magnetization and pressures at nonzero magnetic fields in QCD PoS LATTICE2013* (2014) 182, [arXiv:1310.8145](https://arxiv.org/abs/1310.8145).
- [126] Bonati, C. , D'Elia, M. , Mariti, M. , Negro, F. e Sanfilippo, F., *The magnetic susceptibility in QCD PoS LATTICE2013* (2014) 184, [arXiv:1312.5070](https://arxiv.org/abs/1312.5070).
- [127] Endrödi, G., *QCD equation of state at nonzero magnetic fields in the Hadron Resonance Gas model* *JHEP* **1304** (2013) 023, [arXiv:1301.1307](https://arxiv.org/abs/1301.1307).
- [128] Orlovsky, V.D. e Simonov, Yu. A., *Magnetic susceptibility in QCD* [arXiv:1405.2697](https://arxiv.org/abs/1405.2697).
- [129] Orlovsky, V.D. e Simonov, Yu. A., *Magnetic susceptibility at zero and nonzero chemical potential in QCD and QED* [arXiv:1406.1056](https://arxiv.org/abs/1406.1056).
- [130] Mallick, R. e Schramm, S., *Deformation of a magnetized neutron star* *Phys.Rev.* **C89** no. 4, (2014) 045805, [arXiv:1307.5185](https://arxiv.org/abs/1307.5185).
- [131] Chatterjee, D., Elghozi, T., Novak, J. e Oertel, M., *Consistent neutron star models with magnetic field dependent equations of state* *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **447** (2015) 3785, [arXiv:1410.6332](https://arxiv.org/abs/1410.6332).
- [132] Lasky, P. D., Zink, B., Kokkotas, K. D. e Glampedakis, K., *Hydromagnetic Instabilities in Relativistic Neutron Stars* *The Astr. J. Lett.* **735** no. 1, (2011) L20. <http://stacks.iop.org/2041-8205/735/i=1/a=L20>.
- [133] Kojo, T., Powell, P. D., Song, Y. e Baym, G., *Phenomenological QCD equation of state for massive neutron stars* *Phys.Rev.* **D91** no. 4, (2015) 045003, [arXiv:1412.1108](https://arxiv.org/abs/1412.1108).

- [134] Chu, P., Wang, X. , Chen, L. e Huang, M., *Quark magnetar in the three-flavor NambuJona-Lasinio model with vector interactions and a magnetized gluon potential* *Phys. Rev.* **D91** no. 2, (2015) 023003, [arXiv:1409.6154](https://arxiv.org/abs/1409.6154).
- [135] Menezes, D. P., Pinto, M. B. . Castro, L. B., Costa, P. e Providência, C., *Repulsive Vector Interaction in Three Flavor Magnetized Quark and Stellar Matter* *Phys.Rev.* **C89** no. 5, (2014) 055207, [arXiv:1403.2502](https://arxiv.org/abs/1403.2502).
- [136] Kharzeev, D., *Parity violation in hot QCD: Why it can happen, and how to look for it* *Phys. Lett.* **B633** (2006) 260, [arXiv:hep-ph/0406125](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0406125).
- [137] Kneur, J., Pinto, M. B. e Ramos, R., *Thermodynamics and Phase Structure of the Two-Flavor Nambu–Jona-Lasinio Model Beyond Large- N_c* *Phys. Rev.* **C81** (2010) 065205, [arXiv:1004.3815](https://arxiv.org/abs/1004.3815).
- [138] Kneur, J., Pinto, M. B., Ramos, R. e Staudt, E., *Emergence of tricritical point and liquid-gas phase in the massless $2 + 1$ dimensional Gross-Neveu model* *Phys. Rev.* **D76** (2007) 045020.
- [139] Kneur, J., Pinto, M. B. e Ramos, R., *Critical and tricritical points for the massless 2D Gross-Neveu model beyond large N_c* *Phys. Rev.* **D74** (2006) 125020.
- [140] Ramond, P., *Field Theory*. Frontiers in physics. Westview Press, 1997. <http://books.google.com.br/books?id=Ctr9K61fY4kC>.
- [141] Abramowitz, M. e Stegun, I.A., *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Applied Mathematics Series. Dover Publications, 1964. <http://books.google.com.br/books?id=MtU8uP7XMvoC>.

Apêndice A

Cálculo da Contribuição de Vácuo

De maneira a avaliar o termo divergente da energia do vácuo no potencial efetivo precisamos primeiramente introduzir um *cutoff* Λ no momento. A integral da contribuição de vácuo é dada por

$$\Omega_{vac} = -2N_c N_f \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \sqrt{p^2 + M^2}. \quad (\text{A.1})$$

A integração no momento cartesiano pode ser realizada também em coordenadas esféricas onde o raio no espaço de momento vai de zero até Λ

$$\Omega_{vac} = -2N_c N_f \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\Lambda p^2 dp \sqrt{p^2 + M^2}. \quad (\text{A.2})$$

Esta integral é facilmente avaliada como

$$\begin{aligned} \int_0^\Lambda p^2 dp \sqrt{p^2 + M^2} &= \frac{1}{8} \left[p \sqrt{p^2 + M^2} (M^2 + 2p^2) \right. \\ &\quad \left. - M^4 \ln (2p + 2\sqrt{p^2 + M^2}) \right]_0^\Lambda, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

calculando os limites de integração verifica-se que

$$\Omega_{vac} = -\frac{N_c N_f}{8\pi^2} \left\{ \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + M^2} (M^2 + 2\Lambda^2) - M^4 \ln(2\Lambda + 2\sqrt{\Lambda^2 + M^2}) + M^4 \ln(2M) \right\}. \quad (\text{A.4})$$

Pela inserção da energia $\epsilon_\Lambda = \sqrt{\Lambda^2 + M^2}$ pode-se escrever a contribuição de vácuo como

$$\Omega_{vac} = \frac{N_c N_f}{8\pi^2} \left\{ M^4 \ln \left(\frac{\Lambda + \epsilon_\Lambda}{M} \right) - \epsilon_\Lambda \Lambda (\Lambda^2 + \epsilon_\Lambda^2) \right\}. \quad (\text{A.5})$$

Apêndice B

Contribuição do Meio em $T=0$

No limite de temperatura zero a soma de Matsubara é explicitamente dada em termos da função degrau. A contribuição do meio para o potencial efetivo pode ser escrita como

$$\Omega_{med}(T=0) = -2N_c N_f \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} (\mu - E) \Theta(\mu - E). \quad (B.1)$$

Considerando os seguintes valores assumidos pela função degrau

$$\Theta(\mu - E) = \begin{cases} 0 & \text{if } (\mu - E) < 0 \quad \therefore \quad \mu < E \\ 1 & \text{if } (\mu - E) \geq 0 \quad \therefore \quad \mu \geq E. \end{cases} \quad (B.2)$$

A contribuição do meio é zero a menos que a condição $\mu \geq \sqrt{p^2 + M^2}$ seja satisfeita. Isto implica em um *cutoff* natural dado pelo momentum de Fermi $|p_F| \leq \sqrt{\mu^2 - M^2}$

$$\Omega_{med}(T=0) = -2N_c N_f \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{\sqrt{\mu^2 - M^2}} p^2 dp (\mu - \sqrt{p^2 + M^2}). \quad (B.3)$$

Realizando a respectiva integração encontra-se

$$\Omega_{med}(T=0) = -\frac{N_c N_f}{\pi^2} \left\{ \mu \int_0^{\sqrt{\mu^2 - M^2}} p^2 dp - \int_0^{\sqrt{\mu^2 - M^2}} p^2 \sqrt{p^2 + M^2} dp \right\}, \quad (\text{B.4})$$

e chegamos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \Omega_{med}(T=0) = -\frac{N_c N_f}{\pi^2} \left\{ \frac{\mu}{3} (\mu^2 - M^2)^{3/2} - \frac{1}{8} \left[p \sqrt{p^2 + M^2} (M^2 + 2p^2) \right. \right. \\ \left. \left. - M^4 \ln (2p + 2\sqrt{p^2 + M^2}) \right]_0^{\sqrt{\mu^2 - M^2}} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

avaliando os limites de integração verifica-se que

$$\begin{aligned} \Omega_{med}(T=0) = -\frac{N_c N_f}{\pi^2} \left\{ \frac{\mu}{3} (\mu^2 - M^2)^{3/2} \right. \\ \left. - \frac{1}{8} \left[\mu \sqrt{\mu^2 - M^2} (M^2 + 2(\mu^2 - M^2)^2) \right. \right. \\ \left. \left. - M^4 \ln (2\sqrt{\mu^2 - M^2} + 2\mu) + M^4 \ln (2M) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Arranjando estes termos finalmente concluímos que

$$\begin{aligned} \Omega_{med}(T=0) = -\frac{N_c N_f}{8\pi^2} \left\{ M^4 \ln \left[\frac{(\mu + \sqrt{\mu^2 - M^2})}{M} \right] \right. \\ \left. + \frac{5}{3} \mu (\mu^2 - M^2)^{3/2} - \mu^3 \sqrt{\mu^2 - M^2} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Apêndice C

Teoria de Perturbação Otimizada no Modelo NJL SU(2)

A Teoria de Perturbação Otimizada (*Optimized Perturbation Theory*, OPT) ou Expansão- δ consiste em uma técnica variacional a qual fundamenta-se na completa invariância do grupo de renormalização da teoria fundamental sob análise. Pela introdução conveniente de um esquema de parametrização não físico, a avaliação aproximativa de uma quantidade física \mathcal{P} em uma dada teoria deve ser invariante sob variações destes parâmetros artificiais. As soluções estacionárias corresponderão à condição de mínima sensibilidade onde o resultado exato é uma constante no espaço de parâmetros não físico. Este é o chamado Princípio de Mínima Sensibilidade (PMS) [61]: “Se uma aproximação depende de parâmetros não físicos, então seus valores serão escolhidos de modo a minimizar a sensibilidade do aproximante com respeito a pequenas variações nos parâmetros”. Se um parâmetro de massa arbitrário η é incluído na lagrangiana original então a interpolação variacional de uma dada quantidade física pode ser lida como

$$\left. \frac{d\mathcal{P}}{d\eta} \right|_{\bar{\eta}} = 0. \quad (\text{C.1})$$

onde esta condição de mínima sensibilidade é alcançada para um valor ótimo $\eta = \bar{\eta}$.

Quando aplicado a lagrangiana SU(2) de NJL

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi + G_S[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2], \quad (\text{C.2})$$

o método OPT deforma a teoria original pelas seguintes substituições

$$m \rightarrow m + (1 - \delta)\eta,$$

$$G_S \rightarrow \delta G_S.$$

onde η corresponde um parâmetro arbitrário de desvio na massa e δ é o parâmetro alternativo de expansão perturbativa. Desse modo, a lagrangiana de NJL deformada em δ pode ser escrita como

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}^\delta = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi - (1 - \delta)\eta\bar{\psi}\psi + \delta G_S[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2]. \quad (\text{C.3})$$

Pode-se sempre resgatar a lagrangiana original fazendo $\delta = 1$ ou a teoria de férmions livres por meio de $\delta = 0$. Neste contexto δ funciona apenas como um parâmetro de contabilização *book-keeping*. A Fig.(C.1) ilustra os correspondentes diagramas relativos ao modelo SU(2) de NJL na parametrização OPT. Um valor não nulo para o desvio na massa η nos permite regular possíveis divergências de $m = 0$ no propagador.

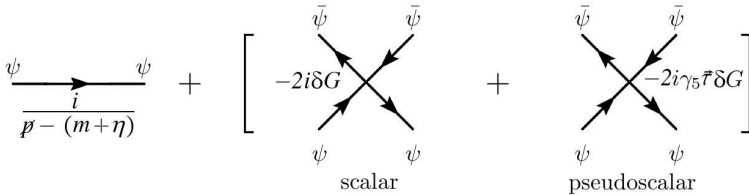


Figura C.1: Diagramas de NJL diagrams na parametrização OPT.

Introduzindo os campos auxiliares relativos aos canais de interação do meson sigma σ e do pion π pela subtração dos seguintes termos na lagrangiana

$$\frac{\delta}{4G_S}(\sigma + 2G_S\bar{\psi}\psi)^2 = \frac{\delta\sigma^2}{4G_S} + \delta\sigma\bar{\psi}\psi + \delta G_S(\bar{\psi}\psi)^2$$

$$\frac{\delta}{4G_S}(\vec{\pi} + 2G_S\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2 = \frac{\delta\pi^2}{4G_S} + \delta\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\pi} \cdot \vec{\tau}\psi + \delta G_S(\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2,$$

nos permite obter a sua versão bosonizada após o cancelamento dos termos relativos aos vértices de quatro férmions.

$$\mathcal{L}^\delta = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi - (1-\delta)\eta\bar{\psi}\psi - \delta\sigma\bar{\psi}\psi - \delta\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\pi} \cdot \vec{\tau}\psi - \frac{\delta}{4G_S}(\sigma^2 + \pi^2). \quad (\text{C.4})$$

Rearranjando os termos pode-se encontrar imediatamente a forma equivalente

$$\mathcal{L}^\delta = \bar{\psi}\{i\gamma_\mu\partial^\mu - (m+\eta) + \delta[(\eta-\sigma) - i\gamma_5\vec{\pi} \cdot \vec{\tau}]\}\psi - \frac{\delta}{4G_S}(\sigma^2 + \pi^2). \quad (\text{C.5})$$

O subsequente cálculo dos traços sobre as matrizes γ_5 nos fornecerá um resultado nulo e a contribuição do campo do pion pode ser ignorada

$$\mathcal{L}^\delta = \bar{\psi}\{i\gamma_\mu\partial^\mu - (m+\eta)\}\psi + \delta\eta\bar{\psi}\psi - \delta\sigma\bar{\psi}\psi - \frac{\delta}{4G_S}\sigma^2. \quad (\text{C.6})$$

Na Fig.(C.2) são mostrados os diagramas de Feynman para esta densidade de lagrangiana na direção do campo σ Pode-se associar diretamente cada termo da lagrangiana a uma dada ordem na expansão δ .

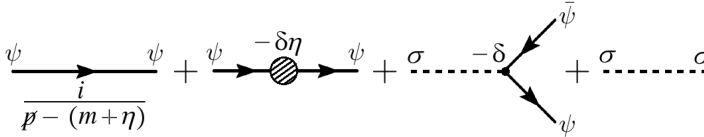


Figura C.2: Diagramas de Feynman associados com a densidade de lagrangiana SU(2) de NJL na expansão δ de OPT.

O primeiro e segundo diagramas estão relacionados a propagação do quark vestido com a nova massa paramétrica $m + \eta$. O terceiro

diagrama é o vértice mesônico corrigido por δ o qual emerge da bosonização. E o último diagrama é a contribuição clássica de vácuo do campo interagente σ . Para obter o diagrama de fases e outras propriedades termodinâmicas relativas a esta lagrangiana interpolada por OPT precisamos encontrar o potencial efetivo pela aplicação das regras de Feynman. Podemos visualizar isto diagramaticamente unindo as pernas de quarks nos diagramas anteriores como mostrado na Fig.(C.3)

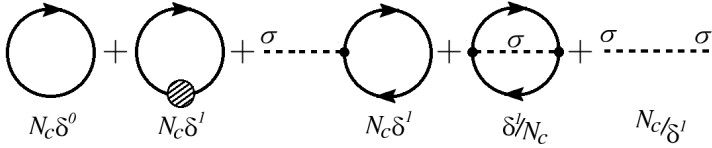


Figura C.3: Diagramas relativos a interpolação OPT da lagrangiana SU(2) de NJL até a ordem δ^1 .

Realizando a expansão perturbativa do potencial efetivo em potências de δ [137] [138] [139] encontramos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \Omega^{OPT} = & \frac{\sigma^2}{4G_S} + 2iN_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln[-p^2 + (m + \eta)^2] \\ & - 4i\delta N_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{(m + \eta)(\eta - \sigma)}{-p^2 + (m + \eta)^2} \\ & - 8\delta G_S \left[\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p_0}{-p^2 + (m + \eta)^2} \right]^2. \end{aligned} \quad (C.7)$$

Em temperatura e potencial químico finitos devemos considerar apenas os modos térmicos permitidos $\omega_\nu = (2\nu + 1)\pi T$ $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ no formalismo de Matsubara através da substituição da componente temporal do momentum $p = (i\omega_\nu + \mu, \mathbf{p})$ e de sua integração

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \rightarrow iT \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}. \quad (C.8)$$

A avaliação destas somas de Matsubara produz a seguinte expressão para o potencial efetivo de NJL pelo método de OPT

$$\begin{aligned}\Omega^{OPT} = & \frac{\bar{\sigma}^2}{4G_S} - 2N_c I_1(\mu, T, \eta) + 2\delta N_c(\eta + m)(\eta - \bar{\sigma}) I_2(\mu, T, \eta) \\ & + 2\delta G_S N_c I_3^2(\mu, T, \eta),\end{aligned}\tag{C.9}$$

com as integrais I_1 , I_2 e I_3 definidas como

$$\begin{aligned}I_1(\mu, T, \eta) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ E + T \ln \left[1 + e^{-(E \pm \mu)/T} \right] \right\}, \\ I_2(\mu, T, \eta) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E} \left[1 - \frac{1}{1 + e^{(E+\mu)/T}} - \frac{1}{1 + e^{(E-\mu)/T}} \right], \\ I_3(\mu, T, \eta) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{1 + e^{(E-\mu)/T}} - \frac{1}{1 + e^{(E+\mu)/T}} \right].\end{aligned}\tag{C.10}$$

aqui a energia é dada por $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + (\eta + m)^2}$.

Apêndice D

Cálculo da Contribuição de Vácuo em Campo Magnético Não Nulo

Quando discutimos os efeitos do campo magnético na lagrangiana de NJL, nos deparamos com a contribuição não térmica devida ambos ao vácuo do mar de Dirac e a energia do campo magnético ele próprio

$$\mathcal{I} = -\frac{N_c}{2\pi} \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k |q_f| B \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} E_{p,k}, \quad (\text{D.1})$$

onde a energia é dada por $E_{p,k}(B) = \sqrt{p_z^2 + 2k|q_f|B + M^2}$. Uma simples contagem das potências de momentum p_z irá revelar uma divergência ultravioleta implícita e desejamos desta forma isolar a parte singular da parte convergente. Escrevendo explicitamente o índice de degenerescência $\alpha_k = 2 - \delta_{k0}$ temos a expressão

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I} &= -\frac{N_c}{\pi} \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{\infty} |q_f| B \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} E_{p,k} + \frac{N_c}{\pi} \sum_{f=u}^d |q_f| B \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \frac{E_{p,0}}{2}, \\
 \mathcal{I} &= -\frac{N_c}{\pi} \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{\infty} |q_f| B \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \left(E_{p,k} - \frac{E_{p,0}}{2} \right), \\
 \mathcal{I} &= -\frac{N_c}{\pi} \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{\infty} |q_f| B \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \sqrt{p_z^2 + 2k|q_f|B + M^2} \\
 &\quad + \frac{N_c}{\pi} \sum_{f=u}^d |q_f| B \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \frac{\sqrt{p_z^2 + M^2}}{2}.
 \end{aligned} \tag{D.2}$$

Estas duas integrais podem ser devidamente avaliadas usando um procedimento de regularização dimensional através da bem conhecida fórmula [140]

$$\int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} (\ell^2 + a^2)^{-A} = \frac{\Gamma[A - d/2]}{\Gamma[A]} \frac{1}{(4\pi)^{d/2} (a^2)^{A-d/2}}. \tag{D.3}$$

Alterando as dimensões de $1 \rightarrow d = 1 - \epsilon$ obtém-se

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{(2\pi)} (p_z^2 + 2k|q_f|B + M^2)^{-(-1/2)} &= \\
 &\frac{\Gamma[-1 + \epsilon/2]}{(4\pi)^{(1-\epsilon)/2} \Gamma[-1/2] (2k|q_f|B + M^2)^{-1+\epsilon/2}} \\
 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{(2\pi)} (p_z^2 + M^2)^{-(-1/2)} &= \\
 &\frac{\Gamma[-1 + \epsilon/2]}{(4\pi)^{(1-\epsilon)/2} \Gamma[-1/2] (M^2)^{-1+\epsilon/2}}.
 \end{aligned} \tag{D.4}$$

Colocando estes termos juntos encontra-se a seguinte expressão

$$\mathcal{I} = -\frac{N_c}{\pi} \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{\infty} |q_f| B \frac{\Gamma[-1 + \epsilon/2]}{(4\pi)^{(1-\epsilon)/2} \Gamma[-1/2]} \times \left[\frac{1}{(2k|q_f|B + M^2)^{-1+\epsilon/2}} - \frac{1}{2(M^2)^{-1+\epsilon/2}} \right]. \quad (\text{D.5})$$

Agora, definindo uma nova variável $x_f = M^2/(2|q_f|B)$ a integral fica escrita como

$$\mathcal{I} = -\frac{N_c}{\pi} \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{\infty} |q_f| B (2|q_f|B)^{1-\epsilon/2} \frac{\Gamma[-1 + \epsilon/2]}{(4\pi)^{(1-\epsilon)/2} \Gamma[-1/2]} \times \left[\frac{1}{(k + x_f)^{-1+\epsilon/2}} - \frac{1}{2x_f^{-1+\epsilon/2}} \right], \quad (\text{D.6})$$

$$\mathcal{I} = -\frac{N_c}{\pi} \sum_{f=u}^d |q_f| B (2|q_f|B)^{1-\epsilon/2} \frac{\Gamma[-1 + \epsilon/2]}{(4\pi)^{(1-\epsilon)/2} \Gamma[-1/2]} \times \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k + x_f)^{-1+\epsilon/2}} - \frac{1}{2x_f^{-1+\epsilon/2}} \right], \quad (\text{D.7})$$

onde $\Gamma[-1/2] = -2\sqrt{\pi}$. Introduzindo a função zeta de Riemann-Hurwitz

$$\zeta(z, x_f) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k + x_f)^z}, \quad (\text{D.8})$$

nossa expressão pode ser escrita explicitamente como

$$\mathcal{I} = \frac{N_c}{2\pi^{3/2}(4\pi)^{(1-\epsilon)/2}} \sum_{f=u}^d |q_f| B (2|q_f|B)^{1-\epsilon/2} \times \Gamma[-1 + \epsilon/2] \left[\zeta(-1 + \epsilon/2, x_f) - \frac{1}{2x_f^{-1+\epsilon/2}} \right], \quad (\text{D.9})$$

Expandindo esta expressão ao redor do ponto $\epsilon = 0$ usando as seguintes aproximações encontra-se

$$\begin{aligned}\Gamma[-1 + \epsilon/2] &= -\frac{2}{\epsilon} - (1 - \gamma_E) + \mathcal{O}(\epsilon^1) \\ \zeta(-1 + \epsilon/2, x_f) &= \zeta(-1, x_f) + \frac{1}{2}\epsilon\zeta^{(1,0)}(-1, x_f) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ -\frac{1}{2x_f^{-1+\epsilon/2}} &= -\frac{x_f}{2} + \frac{1}{4}\epsilon x_f \ln x_f + \mathcal{O}(\epsilon^2).\end{aligned}\tag{D.10}$$

onde $\gamma_E = 0.57721$ é a constante de Euler-Mascheroni e $\zeta^{(1,0)}(z, x_f) = d\zeta(z, x_f)/dz$ é a primeira derivada em relação ao primeiro argumento da função zeta generalizada $\zeta(z, x_f)$

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \frac{N_c}{2\pi^{3/2}(4\pi)^{(1-\epsilon)/2}} \sum_{f=u}^d |q_f| B(2|q_f|B)^{1-\epsilon/2} \left[-\frac{2}{\epsilon} - (1 - \gamma_E) \right] \\ &\times \left[\left(\zeta(-1, x_f) + \frac{1}{2}\epsilon\zeta^{(1,0)}(-1, x_f) \right) + \left(-\frac{x_f}{2} + \frac{1}{4}\epsilon x_f \ln x_f \right) \right],\end{aligned}\tag{D.11}$$

A função zeta $\zeta(-1, x_f)$ pode ser dada em termos dos polinômios de Bernoulli $B_n(x_f)$

$$\zeta(-1, x_f) = -\frac{B_2(x_f)}{2} = -\frac{1}{12} + \frac{x_f}{2} - \frac{x_f^2}{2}.\tag{D.12}$$

Deste modo, a expressão anterior pode ser calculada como

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \frac{N_c}{2\pi^{3/2}(4\pi)^{(1-\epsilon)/2}} \sum_{f=u}^d |q_f| B(2|q_f|B)^{1-\epsilon/2} \left[-\frac{2}{\epsilon} - (1 - \gamma_E) \right] \\ &\times \left[-\frac{1}{12} + \frac{x_f}{2} - \frac{x_f^2}{2} + \frac{1}{2}\epsilon\zeta^{(1,0)}(-1, x_f) - \frac{x_f}{2} + \frac{1}{4}\epsilon x_f \ln x_f \right],\end{aligned}\tag{D.13}$$

Os termos proporcionais a ϵ podem ser excluídos permitindo que o pequeno deslocamento se anule $\epsilon \rightarrow 0$. Os termos inversamente

proporcionais a ϵ são mantidos de modo a caracterizar a parte divergente

$$\mathcal{I} = \frac{N_c}{2\pi^2} \sum_{f=u}^d (|q_f|B)^2 \left[\frac{x_f^2}{\epsilon} + \frac{1}{6\epsilon} + \frac{1}{12}(1 - \gamma_E) + \frac{x_f^2}{2}(1 - \gamma_E) - \zeta^{(1,0)}(-1, x_f) - \frac{1}{2}x_f \ln x_f \right]. \quad (\text{D.14})$$

$$\mathcal{I} = \frac{N_c}{2\pi^2} \sum_{f=u}^d (|q_f|B)^2 \left[\frac{x_f^2}{\epsilon} + \frac{x_f^2}{2}(1 - \gamma_E) - \zeta^{(1,0)}(-1, x_f) - \frac{1}{2}x_f \ln x_f \right]. \quad (\text{D.15})$$

O comportamento singular desta soma está associado a energia infinita do mar de Dirac

$$\Omega_{vac} = -2N_c N_f \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \sqrt{p^2 + M^2}. \quad (\text{D.16})$$

e pode ser removida da integral \mathcal{I} somando e subtraindo um termo de vácuo Ω_{vac}

$$\mathcal{I} = \mathcal{I} - \Omega_{vac} + \Omega_{vac} \quad (\text{D.17})$$

Um dos termos de vácuo $+\Omega_{vac}$ pode ser regularizado por um procedimento usual de *cutoff* como já mostrado no apêndice A. O outro termo que é subtraído $-\Omega_{vac}$ deve ser obtido por meio de um procedimento de regularização dimensional usando a fórmula fornecida em D.3. Para realizar esta tarefa precisamos considerar a seguinte mudança de variáveis de maneira a produzir o resultado conveniente

$$\begin{aligned} p^2 &\rightarrow p'^2 / (2|q_f|B) \\ M^2 &\rightarrow x_f = M^2 / (2|q_f|B) \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

Inserindo novamente um pequeno desvio do caso tridimensional $3 \rightarrow d = 3 - \epsilon$ e substituindo o número de sabores N_f pela soma equivalente $\sum_{f=u}^d$ podemos ler o seguinte

$$\begin{aligned}
 \Omega_{vac} &= -2N_c \sum_{f=u}^d (2|q_f|B)^{2-\epsilon/2} \int \frac{d^{3-\epsilon}p'}{(2\pi)^{3-\epsilon}} (p'^2 + x_f)^{-(-1/2)} \\
 &= -2N_c \sum_{f=u}^d (2|q_f|B)^{2-\epsilon/2} \frac{\Gamma[-2 + \epsilon/2]}{(4\pi)^{(3-\epsilon)/2} \Gamma[-1/2] x_f^{-2+\epsilon/2}} \\
 &= -\frac{2N_c}{(4\pi)^{(3-\epsilon)/2} \Gamma[-1/2]} \sum_{f=u}^d (2|q_f|B)^{2-\epsilon/2} \frac{\Gamma[-2 + \epsilon/2]}{x_f^{-2+\epsilon/2}}.
 \end{aligned} \tag{D.19}$$

Expandindo esta função ao redor do ponto $\epsilon = 0$ temos

$$\begin{aligned}
 \Omega_{vac} &= -\frac{2N_c}{(4\pi)^{(3-\epsilon)/2} \Gamma[-1/2]} \sum_{f=u}^d (2|q_f|B)^{2-\epsilon/2} \\
 &\quad \times \left[\frac{x_f^2}{\epsilon} + \frac{1}{4}(3x_f^2 - 2x_f^2\gamma_E - 2x_f^2 \ln(x_f)) \right].
 \end{aligned} \tag{D.20}$$

Além disso, dividindo o termo em duas frações

$$\begin{aligned}
 \Omega_{vac} &= \frac{2N_c}{(4\pi)^{3/2} 2\pi^{1/2}} \sum_{f=u}^d (2|q_f|B)^{2-\epsilon/2} \\
 &\quad \times \left[\frac{x_f^2}{\epsilon} + \frac{x_f^2}{4} + \frac{x_f^2}{2}(1 - \gamma_E) - \frac{x_f^2}{2} \ln(x_f) \right].
 \end{aligned} \tag{D.21}$$

Estabelecendo novamente o valor de ϵ igual a zero exceto para a parte divergente encontra-se o resultado para a contribuição de vácuo avaliada por meio da regularização dimensional

$$\Omega_{vac} = \frac{N_c}{2\pi^2} \sum_{f=u}^d (|q_f|B)^2 \left[\frac{x_f^2}{\epsilon} + \frac{x_f^2}{4} + \frac{x_f^2}{2}(1 - \gamma_E) - \frac{x_f^2}{2} \ln(x_f) \right]. \tag{D.22}$$

Com este cálculo pode-se inserir as expressões A.5,D.22 e D.15 em D.17 para finalmente chegar ao seguinte resultado

$$\begin{aligned} \mathcal{I} = & -\frac{N_c}{2\pi^2} \sum_{f=u}^d (|q_f|B)^2 \left[\zeta^{(1,0)}(-1, x_f) - \frac{1}{2}(x_f^2 - x_f) \ln x_f + \frac{x_f^2}{4} \right] \\ & + \frac{N_c N_f}{8\pi^2} \left[M^4 \ln \left(\frac{\Lambda + \epsilon_\Lambda}{M} \right) - \epsilon_\Lambda \Lambda (\Lambda^2 + \epsilon_\Lambda^2) \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

Apêndice E

Contribuição do Meio em $T=0$ e Campo Magnético Não Nulo

No limite de temperatura zero a influência do campo magnético na dinâmica do sistema fermiônico é estabelecida de acordo com a função degrau entre o potencial químico μ e a relação de dispersão $E_{p,k}$

$$\Omega_{med}(T=0) = -\frac{N_c}{2\pi} \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k |q_f| B \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} (\mu - E_{p,k}) \Theta(\mu - E_{p,k}) \quad (\text{E.1})$$

Por conveniência, pode-se introduzir uma nova variável $s_f(k, B) = \sqrt{M^2 + 2|q_f|kB}$ com o intuito de realizar a integração de um modo mais simples. Similarmente como explicado no Apêndice B, a condição $|p_z| \leq \sqrt{\mu^2 - s_f^2(k_f, B)}$ deve ser satisfeita de modo a proporcionar um valor não nulo da função degrau. Adicionalmente, o momentum p_z é considerado uma quantidade real e a condição $\mu^2 - s_f^2(k, B) \geq 0$ implica que

$$\begin{aligned}
 (\mu^2 - M^2) - 2|q_f|kB &\geq 0 \\
 2|q_f|kB &\leq (\mu^2 - M^2).
 \end{aligned}
 \tag{E.2}$$

Esta exigência é cumprida se estabelecemos um nível de Landau superior definido por

$$k_{f,max} = \frac{\mu^2 - M^2}{2|q_f|B}. \tag{E.3}$$

A integração acima torna-se uma tarefa simples porque os limites de integração infinitos são substituídos pelo intervalo $-\sqrt{\mu^2 - s_f^2(k, B)} \leq p_z \leq +\sqrt{\mu^2 - s_f^2(k, B)}$ e a soma sobre os estados de Landau não vai além do nível superior atribuído por $k_{f,max}$. Escrevendo explicitamente a integral temos

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^{+\infty} dp_z \left(\mu - \sqrt{p_z^2 + s_f^2} \right) \Theta \left(\mu - \sqrt{p_z^2 + s_f^2} \right) \\
 &= \mu \int dp_z - \int \sqrt{p_z^2 + s_f^2} dp_z \\
 &= \left[\mu p_z - \frac{1}{2} p_z \sqrt{p_z^2 + s_f^2} + \frac{s_f^2}{2} \ln \left[p_z + \sqrt{p_z^2 + s_f^2} \right] \right]_{-\sqrt{\mu^2 - s_f^2}}^{+\sqrt{\mu^2 - s_f^2}} \\
 &= \mu \sqrt{\mu^2 - s_f^2} - \frac{s_f^2}{2} \ln \left(\frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - s_f^2}}{\mu - \sqrt{\mu^2 - s_f^2}} \right).
 \end{aligned}
 \tag{E.4}$$

Após alguma manipulação chega-se ao resultado esperado

$$\begin{aligned}
 \Omega_{med}(T=0) = & -\frac{N_c}{4\pi^2} \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{k_{f,max}} \alpha_k |q_f| B \left\{ \mu \sqrt{\mu^2 - s_f^2} \right. \\
 & \left. - s_f^2 \ln \left(\frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - s_f^2}}{s_f} \right) \right\}
 \end{aligned}
 \tag{E.5}$$

Apêndice F

Equação de Clausius-Clayperon em Campo Magnético Não Nulo

Vamos considerar duas fases distintas de uma determinada substância termodinâmica separadas por uma linha de transição no plano $P - T$ conforme indica a Fig.(F.1).

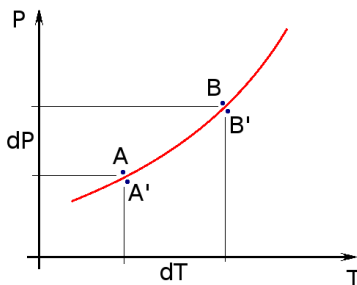


Figura F.1: Linha de separação de fases no plano $P - T$.

Para um par de pontos A e A' representando a substância em duas fases distintas, temos o equilíbrio químico dado por:

$$\mu_A = \mu_{A'} \quad (\text{F.1})$$

Para um outro par de pontos B e B' devemos ter o mesmo:

$$\mu_B = \mu_{B'} \quad (\text{F.2})$$

A diferença de potencial químico entre essas duas posições é dada por:

$$\mu_B - \mu_A = \mu_{B'} - \mu_{A'} \quad (\text{F.3})$$

Indo de um par de pontos ao outro devemos realizar uma variação infinitesimal nas variáveis que determinam a densidade de energia, sob a influência do campo magnético B :

$$\mu_B - \mu_A = -sdT + vdP - \mathcal{M}dB \quad (\text{F.4})$$

$$\mu_{B'} - \mu_{A'} = -s'dT + v'dP - \mathcal{M}'dB$$

Como o campo magnético em nosso caso é considerado constante $dB \rightarrow 0$ e temos apenas:

$$\mu_B - \mu_A = -sdT + vdP \quad (\text{F.5})$$

$$\mu_{B'} - \mu_{A'} = -s'dT + v'dP$$

usando a igualdade [F.3](#) acima:

$$-sdT + vdP = -s'dT + v'dP \quad (\text{F.6})$$

rearranjando os termos temos:

$$(s' - s)dT = (v' - v)dP \quad (\text{F.7})$$

e portanto, chegamos à equação de Clausius-Clapeyron:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\Delta s}{\Delta v} \quad (\text{F.8})$$

Apêndice G

Derivadas Auxiliares para o Cálculo da Magnetização

Aqui vamos demonstrar analiticamente as expressões utilizadas no estudo da anisotropia da matéria de quarks mostrada no Capítulo [6](#).

G.1 Derivada da Contribuição de Vácuo

Sendo a contribuição de vácuo para o potencial efetivo dada por

$$\Omega_f^{vac} = \frac{N_c}{8\pi^2} \left[M^4 \ln \left(\frac{\Lambda + \epsilon_\Lambda}{M} \right) - \epsilon_\Lambda \Lambda (\Lambda^2 + \epsilon_\Lambda^2) \right], \quad (\text{G.1})$$

temos que a respectiva derivada em relação ao campo B deve ser escrita como

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_f^{vac}}{dB} = \frac{N_c}{8\pi^2} \left[4M^3 M' \ln \left(\frac{\Lambda + \epsilon_\Lambda}{M} \right) + M^4 \ln' \left(\frac{\Lambda + \epsilon_\Lambda}{M} \right) \right. \\ \left. - \epsilon'_\Lambda \Lambda (\Lambda^2 + \epsilon_\Lambda^2) - 2\epsilon_\Lambda^2 \epsilon'_\Lambda \Lambda \right]. \end{aligned} \quad (G.2)$$

De modo que temos a derivada $\epsilon'_\Lambda = MM'\epsilon_\Lambda^{-1}$. Ao tomar a derivada do termo logarítmico temos

$$\frac{d}{dB} \ln \left[\frac{\Lambda + \epsilon_\Lambda}{M} \right] = \frac{1}{M(\Lambda + \epsilon_\Lambda)} \left[\frac{M^2 M'}{\epsilon_\Lambda} - M'(\Lambda + \epsilon_\Lambda) \right]. \quad (G.3)$$

Assim, agrupando os termos na expressão de $\Omega_f'^{vac}$ obtemos

$$\begin{aligned} \Omega_f'^{vac} = \frac{N_c}{8\pi^2} \left\{ 4M^3 M' \ln \left[\frac{\Lambda + \epsilon_\Lambda}{M} \right] + \frac{M^3}{(\Lambda + \epsilon_\Lambda)} \left[\frac{M^2 M'}{\epsilon_\Lambda} - M'(\Lambda + \epsilon_\Lambda) \right] \right. \\ \left. - \frac{MM'}{\epsilon_\Lambda} \Lambda (\Lambda^2 + \epsilon_\Lambda^2) - 2\epsilon_\Lambda \Lambda MM' \right\}. \end{aligned} \quad (G.4)$$

Arrumando os termos de modo conveniente chegamos ao seguinte

$$\begin{aligned} \Omega_f'^{vac} = \frac{N_c M'}{8\pi^2} \left\{ 4M^3 \ln \left[\frac{\Lambda + \epsilon_\Lambda}{M} \right] + \frac{M^5}{\epsilon_\Lambda (\Lambda + \epsilon_\Lambda)} \right. \\ \left. - M^3 - \frac{M\Lambda^3}{\epsilon_\Lambda} - 3M\epsilon_\Lambda \Lambda \right\}. \end{aligned} \quad (G.5)$$

Após uma longa manipulação algébrica destes termos podemos verificar que

$$\Omega_f'^{vac} = -\frac{N_c MM'}{2\pi^2} \left\{ \Lambda \epsilon_\Lambda - M^2 \ln \left[\frac{\Lambda + \epsilon_\Lambda}{M} \right] \right\}. \quad (G.6)$$

Como explicado antes no Capítulo 6, todos os termos que apresentarem a derivada M' não devem contribuir pois sempre vão estar multiplicados pela derivada respectiva à equação do *gap*. Dessa forma, fazemos

$$\Omega_f'^{vac} = 0 \quad (G.7)$$

G.2 Derivada da Contribuição Magnética

Seja a expressão para a contribuição magnética no potencial efetivo dada por

$$\Omega_f^{mag} = -\frac{N_c(|q_f|B)^2}{2\pi^2} \left[\zeta^{(1,0)}(-1, x_f) - \frac{1}{2} (x_f^2 - x_f) \ln x_f + \frac{x_f^2}{4} \right]. \quad (\text{G.8})$$

É possível determinar sua derivada em relação ao campo magnético por meio da expressão abaixo

$$\Omega_f'^{mag} = \frac{d\Omega_f^{mag}}{dB} = \frac{\partial\Omega_f^{mag}}{\partial B} + \frac{\partial\Omega_f^{mag}}{\partial x_f} \left[\left(\frac{\partial x_f}{\partial B} \right) + \left(\frac{\partial x_f}{\partial M} \right) \left(\frac{\partial M}{\partial B} \right) \right]. \quad (\text{G.9})$$

Avaliando cada uma dessas derivadas verificamos o seguinte

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Omega_f^{mag}}{\partial B} &= 2 \frac{\Omega_f^{mag}}{B}, & \frac{\partial x_f}{\partial M} &= \frac{M}{|q_f|B}, \\ \left(\frac{\partial x_f}{\partial M} \right) \left(\frac{\partial M}{\partial B} \right) &= \frac{MM'}{|q_f|B}, & \frac{\partial x_f}{\partial B} &= -\frac{x_f}{B} = -\frac{M^2}{2|q_f|B^2}. \end{aligned} \quad (\text{G.10})$$

A partir dessas informações calculamos a expressão

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Omega_f^{mag}}{\partial x_f} &= -\frac{N_c(|q_f|B)^2}{2\pi^2} \left[\zeta^{(1,1)}(-1, x_f) - \frac{1}{2} (2x_f - 1) \ln x_f \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (x_f^2 - x_f) \frac{1}{x_f} + \frac{2x_f}{4} \right], \end{aligned} \quad (\text{G.11})$$

cancelando os termos e simplificando nos fornece

$$\frac{\partial\Omega_f^{mag}}{\partial x_f} = -\frac{N_c(|q_f|B)^2}{2\pi^2} \left[\zeta^{(1,1)}(-1, x_f) - (x_f - \frac{1}{2}) \ln x_f + \frac{1}{2} \right]. \quad (\text{G.12})$$

Na equação anterior, temos a derivada da função zeta de Riemann-Hurwitz $\zeta^{(1,1)}(-1, x_f)$ em relação ao segundo argumento onde aparece x_f . Devemos notar aqui que as primeiras derivadas associadas a cada argumento da função $\zeta(z, x_f)$ comutam e assim verifica-se [141] que

$$\zeta^{(1,1)}(z, x_f) = \frac{\partial}{\partial x_f} \frac{\partial}{\partial z} \zeta(z, x_f) = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x_f} \zeta(z, x_f) = \frac{\partial}{\partial z} [-z \zeta(z+1, x_f)] , \quad (\text{G.13})$$

de maneira que a derivada no segundo argumento produz deslocamento no primeiro argumento. Por conseguinte, procedendo a derivação em z chegamos à

$$\begin{aligned} \zeta^{(1,1)}(z, x_f) &= -\zeta(z+1, x_f) - z \zeta^{(1,0)}(z+1, x_f) \\ \zeta^{(1,1)}(-1, x_f) &= -\zeta(0, x_f) + \zeta^{(1,0)}(0, x_f) , \end{aligned} \quad (\text{G.14})$$

e usando as identidades abaixo

$$\begin{cases} \zeta(0, x_f) = \frac{1}{2} - x_f \\ \zeta^{(1,0)}(0, x_f) = \ln \Gamma(x_f) - \frac{1}{2} \ln(2\pi) . \end{cases} \quad (\text{G.15})$$

Portanto, encontramos

$$\zeta^{(1,1)}(-1, x_f) = -\frac{1}{2} + x_f + \ln \Gamma(x_f) - \frac{1}{2} \ln(2\pi) . \quad (\text{G.16})$$

Agrupando todos os resultados mostrados na Eq. (G.9) obtemos

$$\begin{aligned} \Omega_f'^{mag} &= 2 \frac{\Omega_f^{mag}}{B} - \frac{N_c(|q_f|B)^2}{2\pi^2} \left(\frac{MM'}{|q_f|B} - \frac{M^2}{2|q_f|B^2} \right) \times \\ &\quad \left[\ln \Gamma(x_f) - \frac{1}{2} \ln(2\pi) + x_f - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \left(x_f - \frac{1}{2} \right) \ln(x_f) \right] . \end{aligned} \quad (\text{G.17})$$

Como discutido o termo que contém a derivada M' não deve contribuir nos pontos estacionários da equação do *gap* e então

$$\begin{aligned} \Omega_f'^{mag} = 2 \frac{\Omega_f^{mag}}{B} + \frac{N_c M^2 |q_f|}{4\pi^2} \left[\ln \Gamma(x_f) - \frac{1}{2} \ln(2\pi) \right. \\ \left. + x_f - \left(x_f - \frac{1}{2} \right) \ln(x_f) \right] . \end{aligned} \quad (G.18)$$

G.3 Derivada da Contribuição do Meio em Temperatura Finita

Nosso ponto de partida na determinação desta derivada é a contribuição do meio denso no potencial efetivo para temperatura finita

$$\Omega_f^{med}|_{T>0} = -\frac{N_c |q_f| B}{2\pi} \sum_{k_f=0}^{\infty} \alpha_{k_f} T \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \ln \left[1 + e^{-(E_{k_f} \pm \tilde{\mu})/T} \right] . \quad (G.19)$$

Vamos introduzir as seguintes variáveis para a realização do cálculo

$$\begin{aligned} y &= \ln(y_+) + \ln(y_-) , \\ y_+ &= 1 + e^{-(E_{k_f} - \tilde{\mu})/T} , \\ y_- &= 1 + e^{-(E_{k_f} + \tilde{\mu})/T} . \end{aligned} \quad (G.20)$$

Fazendo isso, podemos avaliar a derivada de Ω_f^{med} em relação à B por meio da expressão

$$\begin{aligned} \Omega_f'^{med} = \frac{d\Omega_f^{med}}{dB} = \frac{\partial \Omega_f^{med}}{\partial B} + \left(\frac{\partial \Omega_f^{med}}{\partial \tilde{\mu}} \right) \left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial B} \right) + \left(\frac{\partial \Omega_f^{med}}{\partial M} \right) \left(\frac{\partial M}{\partial B} \right) \\ + \frac{\partial \Omega_f^{med}}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial y_+} \right) \left(\frac{\partial y_+}{\partial E_{k_f}} \right) + \left(\frac{\partial y}{\partial y_-} \right) \left(\frac{\partial y_-}{\partial E_{k_f}} \right) \right] \left(\frac{\partial E_{k_f}}{\partial B} \right) . \end{aligned} \quad (G.21)$$

Tanto a derivada $\partial M / \partial B$, quanto $\partial \tilde{\mu} / \partial B$ são multiplicadas pelas contribuições do meio nas equações do *gap* $\partial \Omega_f^{med} / \partial M$ e $\partial \Omega_f^{med} / \partial \tilde{\mu}$ e

não precisamos calcular. Necessitamos apenas das derivadas explícitas em B . Tomando a energia $E_{k_f} = \sqrt{p_z^2 + 2k_f|q_f|B + M^2}$ e as expressões anteriores para y , podemos chegar aos termos

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_{k_f}}{\partial B} &= \frac{k_f|q_f|}{E_{k_f}}, \\ \frac{\partial y_{\pm}}{\partial E_{k_f}} &= \frac{1 - y_{\pm}}{T}, \\ \frac{\partial y}{\partial y_{\pm}} &= \frac{1}{y_{\pm}}.\end{aligned}\tag{G.22}$$

associando estes termos temos

$$\begin{aligned}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial y_+} \right) \left(\frac{\partial y_+}{\partial E_{k_f}} \right) + \left(\frac{\partial y}{\partial y_-} \right) \left(\frac{\partial y_-}{\partial E_{k_f}} \right) \right] &= -\frac{1}{T} \left[\frac{1}{1 + e^{+(E_{k_f} \pm \tilde{\mu})/T}} \right] \\ &= -\frac{1}{T} (n_{p,k_f} + \bar{n}_{p,k_f}).\end{aligned}\tag{G.23}$$

Por fim usando a relação da Eq.(G.21) chegamos ao resultado

$$\Omega_f'^{med}|_{T>0} = \frac{\Omega_f^{med}}{B} + \frac{N_c|q_f|^2 B}{4\pi^2} \sum_{k_f=0}^{\infty} \alpha_{k_f} k_f \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z \frac{1}{E_{k_f}} (n_{p,k_f} + \bar{n}_{p,k_f}).\tag{G.24}$$

G.4 Derivada da Contribuição do Meio em Temperatura Nula

No limite de temperatura zero, temos o seguinte termo

$$\Omega_f^{med}|_{T=0} = -\frac{N_c|q_f|B}{4\pi^2} \sum_{k_f=0}^{k_{f,max}} \alpha_{k_f} \left[\tilde{\mu} \sqrt{\tilde{\mu}^2 - s_f^2} - s_f^2 \ln \left(\frac{\tilde{\mu} + \sqrt{\tilde{\mu}^2 - s_f^2}}{s_f} \right) \right].\tag{G.25}$$

Usando a regra da cadeia para a derivação temos

$$\begin{aligned}\Omega_f'^{med} = \frac{d\Omega_f^{med}}{dB} &= \frac{\partial\Omega_f^{med}}{\partial B} + \left(\frac{\partial\Omega_f^{med}}{\partial s_f} \right) \left[\left(\frac{\partial s_f}{\partial B} \right) + \left(\frac{\partial s_f}{\partial M} \right) \left(\frac{\partial M}{\partial B} \right) \right] \\ &+ \left(\frac{\partial\Omega_f^{med}}{\partial \tilde{\mu}} \right) \left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial B} \right) .\end{aligned}\tag{G.26}$$

Como antes não consideramos os últimos termos e ficamos com

$$\Omega_f'^{med} = \frac{d\Omega_f^{med}}{dB} = \frac{\partial\Omega_f^{med}}{\partial B} + \left(\frac{\partial\Omega_f^{med}}{\partial s_f} \right) \left(\frac{\partial s_f}{\partial B} \right) .\tag{G.27}$$

Assumindo esta equação, temos que as derivadas dadas por $\partial\Omega_f^{med}/\partial B = \Omega_f^{med}/B$ e $\partial s_f/\partial B = k_f|q_f|/s_f$. Além disso, temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Omega_f^{med}}{\partial s_f} &= -\frac{N_c|q_f|B}{4\pi^2} \sum_{k_f=0}^{k_{f,max}} \alpha_{k_f} \left\{ -\frac{\tilde{\mu}s_f}{\sqrt{\tilde{\mu}^2 - s_f^2}} \right. \\ &\quad \left. -2s_f \ln \left(\frac{\tilde{\mu} + \sqrt{\tilde{\mu}^2 - s_f^2}}{s_f} \right) \right. \\ &\quad \left. -\frac{s_f \left[-s_f^2(\tilde{\mu}^2 - s_f^2)^{-1/2} - \tilde{\mu} - (\tilde{\mu}^2 - s_f^2)^{1/2} \right]}{\tilde{\mu} + \sqrt{\tilde{\mu}^2 - s_f^2}} \right\} ,\end{aligned}\tag{G.28}$$

manipulando os termos da expressão acima obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Omega_f^{med}}{\partial s_f} &= -\frac{N_c|q_f|B}{4\pi^2} \sum_{k_f=0}^{k_{f,max}} \alpha_{k_f} \left[-2s_f \ln \left(\frac{\tilde{\mu} + \sqrt{\tilde{\mu}^2 - s_f^2}}{s_f} \right) \right. \\ &\quad \left. -\frac{\tilde{\mu}s_f}{\sqrt{\tilde{\mu}^2 - s_f^2}} + \frac{s_f}{\tilde{\mu} + \sqrt{\tilde{\mu}^2 - s_f^2}} \left(\frac{s_f^2}{\sqrt{\tilde{\mu}^2 - s_f^2}} + \tilde{\mu} + \sqrt{\tilde{\mu}^2 - s_f^2} \right) \right] ,\end{aligned}\tag{G.29}$$

logo temos

$$\frac{\partial \Omega_f^{med}}{\partial s_f} = \frac{N_c |q_f| B}{4\pi^2} \sum_{k_f=0}^{k_{f,max}} 2\alpha_{k_f} s_f \ln \left(\frac{\tilde{\mu} + \sqrt{\tilde{\mu}^2 - s_f^2}}{s_f} \right). \quad (\text{G.30})$$

Por fim, associando todos os termos calculados de acordo com a Eq.(G.27), verificamos que

$$\Omega_f'^{med}|_{T=0} = \frac{\Omega_f^{med}}{B} + \frac{N_c |q_f|^2 B}{2\pi^2} \sum_{k_f=0}^{k_{f,max}} \alpha_{k_f} k_f \ln \left(\frac{\tilde{\mu} + \sqrt{\tilde{\mu}^2 - s_f^2}}{s_f} \right). \quad (\text{G.31})$$

G.5 Derivada da Contribuição de Vácuo no Condensado

De modo semelhante ao feito anteriormente para as outras derivadas, agora vamos determinar as expressões relativas ao condensado de quarks. Sendo a expressão para a contribuição de vácuo no condensado dada por

$$\phi_f^{vac} = -\frac{N_c M}{2\pi^2} \left[\Lambda \epsilon_\Lambda - M^2 \ln \left(\frac{\Lambda + \epsilon_\Lambda}{M} \right) \right], \quad (\text{G.32})$$

temos que a derivada em relação ao campo B deve ser

$$\phi_f'^{vac} = \frac{d\phi_f^{vac}}{dB} = \frac{\partial \phi_f^{vac}}{\partial B} + \left(\frac{\partial \phi_f^{vac}}{\partial M} \right) \left(\frac{\partial M}{\partial B} \right) + \left(\frac{\partial \phi_f^{vac}}{\partial \tilde{\mu}} \right) \left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial B} \right). \quad (\text{G.33})$$

Como as últimas derivadas em M e $\tilde{\mu}$ envolvem as equações do *gap*, essa parte não deve contribuir. Al ém disso, como ϕ_f^{vac} não depende explicitamente de B temos que $\partial \phi_f^{vac} / \partial B = 0$ e assim

$$\phi_f'^{vac} = 0. \quad (\text{G.34})$$

G.6 Derivada da Contribuição Magnética no Condensado

Para obter a derivada da expressão abaixo

$$\phi_f^{mag} = -\frac{N_c M |q_f| B}{2\pi^2} \left[\ln \Gamma(x_f) - \frac{1}{2} \ln(2\pi) + x_f - \frac{1}{2} (2x_f - 1) \ln(x_f) \right] , \quad (\text{G.35})$$

precisamos escrever a seguinte equação

$$\phi_f'^{mag} = \frac{d\phi_f^{mag}}{dB} = \frac{\partial \phi_f^{mag}}{\partial B} + \left(\frac{\partial \phi_f^{mag}}{\partial x_f} \right) \left(\frac{\partial x_f}{\partial B} \right) . \quad (\text{G.36})$$

A primeira derivada que aparece na expressão é bastante simples e temos que

$$\frac{\partial \phi_f^{mag}}{\partial B} = \frac{\phi_f^{mag}}{B} . \quad (\text{G.37})$$

Por outro lado, em relação à variável $x_f = M^2/(2|q_f|B)$ temos o seguinte

$$\frac{\partial \phi_f^{mag}}{\partial x_f} = -\frac{N_c M |q_f| B}{2\pi^2} \left[\frac{\partial}{\partial x_f} \ln \Gamma(x_f) + 1 - \ln(x_f) - 1 + \frac{1}{2x_f} \right] . \quad (\text{G.38})$$

Ao avaliar a primeira parte, necessitamos encontrar a derivada logarítmica da função gama

$$\frac{\partial}{\partial z} \Gamma(z) = \Gamma(z) \psi^{(0)}(z) , \quad (\text{G.39})$$

a qual define a função digama $\psi^{(0)}(z)$ da variável complexa z [141]. Portanto, verificamos o que segue

$$\frac{\partial}{\partial z} \ln \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \psi^{(0)}(z) . \quad (\text{G.40})$$

Assim, temos

$$\frac{\partial \phi_f^{mag}}{\partial x_f} = -\frac{N_c M |q_f| B}{2\pi^2} \left[\psi^{(0)}(x_f) - \ln(x_f) + \frac{1}{2x_f} \right] . \quad (\text{G.41})$$

Sendo a derivada de x_f dada por

$$\frac{\partial x_f}{\partial B} = -\frac{x_f}{B} , \quad (\text{G.42})$$

vemos pela Eq.(G.36) que

$$\phi_f'^{mag} = \frac{\phi_f^{mag}}{B} - \frac{N_c M |q_f| B}{2\pi^2} \left[\psi^{(0)}(x_f) - \ln(x_f) + \frac{1}{2x_f} \right] \left(-\frac{x_f}{B} \right) . \quad (\text{G.43})$$

Escrevendo explicitamente o primeiro termo na expressão acima usando a Eq.(G.35) devemos encontrar

$$\begin{aligned} \phi_f'^{mag} = & -\frac{N_c M |q_f|}{2\pi^2} \left[\ln \Gamma(x_f) - \frac{1}{2} \ln(2\pi) + x_f - \frac{1}{2} (2x_f - 1) \ln(x_f) \right] \\ & - \frac{N_c M |q_f| B}{2\pi^2} \left[\psi^{(0)}(x_f) - \ln(x_f) + \frac{1}{2x_f} \right] \left(-\frac{x_f}{B} \right) , \end{aligned} \quad (\text{G.44})$$

e assim

$$\begin{aligned} \phi_f'^{mag} = & -\frac{N_c M |q_f|}{2\pi^2} \left[\ln \Gamma(x_f) - \frac{1}{2} \ln(2\pi) + x_f - \frac{1}{2} (2x_f - 1) \ln(x_f) \right. \\ & \left. - x_f \psi^{(0)}(x_f) + x_f \ln(x_f) - \frac{1}{2} \right] , \end{aligned} \quad (\text{G.45})$$

$$\begin{aligned} \phi_f'^{mag} = & \frac{N_c M |q_f|}{4\pi^2} \left[-2 \ln \Gamma(x_f) + \ln(2\pi) - 2x_f + (2x_f - 1) \ln(x_f) \right. \\ & \left. + 2x_f \psi^{(0)}(x_f) - 2x_f \ln(x_f) + 1 \right] , \end{aligned} \quad (\text{G.46})$$

arranjando os termos, temos

$$\phi_f'^{mag} = \frac{N_c M |q_f|}{4\pi^2} \left\{ 2x_f \left[\psi^{(0)}(x_f) - 1 \right] + 1 - \ln \left(\frac{x_f}{2\pi} \right) - 2 \ln \Gamma(x_f) \right\} , \quad (\text{G.47})$$

e finalmente podemos escrever que

$$\phi_f'^{mag} = \frac{N_c M}{4\pi^2} \left\{ \frac{M^2}{B} \left[\psi^{(0)}(x_f) - 1 \right] + |q_f| \left[1 - \ln \left(\frac{x_f}{2\pi} \right) - 2 \ln \Gamma(x_f) \right] \right\} . \quad (\text{G.48})$$

G.7 Derivada da Contribuição do Meio no Condensado em Temperatura Finita

Como vimos no Capítulo 6, a determinação de uma expressão analítica para a magnetização depende basicamente das derivadas dos termos que contribuem para o cálculo da pressão no sistema. Dessa forma, em temperatura finita, a contribuição do meio denso no condensado de quarks dada respectivamente por

$$\phi_f^{med}|_{T>0} = \frac{N_c M |q_f| B}{4\pi^2} \sum_{k_f=0}^{\infty} \alpha_{k_f} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z \frac{1}{E_{k_f}} (n_{p,k_f} + \bar{n}_{p,k_f}) , \quad (\text{G.49})$$

deve nos fornecer a seguinte derivada

$$\begin{aligned} \phi_f'^{med} = \frac{d\phi_f^{med}}{dB} &= \frac{\partial \phi_f^{med}}{\partial B} + \left[\left(\frac{\partial \phi_f^{med}}{\partial n_{p,k_f}} \right) \left(\frac{\partial n_{p,k_f}}{\partial E_{k_f}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial \phi_f^{med}}{\partial \bar{n}_{p,k_f}} \right) \left(\frac{\partial \bar{n}_{p,k_f}}{\partial E_{k_f}} \right) + \left(\frac{\partial \phi_f^{med}}{\partial E_{k_f}} \right) \right] \left(\frac{\partial E_{k_f}}{\partial B} \right) . \end{aligned} \quad (\text{G.50})$$

Sabendo que $E_{k_f} = \sqrt{p_z^2 + 2k_f |q_f| B + M^2}$ e usando a expressão mostrada na Eq.(G.48) somos capazes de avaliar as seguintes derivadas

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_f^{med}}{\partial B} &= \frac{\phi_f^{med}}{B} , \\ \frac{\partial E_{k_f}}{\partial B} &= \frac{k_f |q_f|}{E_{k_f}} .\end{aligned}\tag{G.51}$$

Além disso, as derivadas relativas às distribuições de Fermi são expressas como

$$\begin{aligned}\frac{\partial n_{p,k_f}}{\partial E_{k_f}} &= -\frac{n_{p,k_f}^2}{T} e^{(E_{k_f} - \tilde{\mu})/T} , \\ \frac{\partial \bar{n}_{p,k_f}}{\partial E_{k_f}} &= -\frac{\bar{n}_{p,k_f}^2}{T} e^{(E_{k_f} + \tilde{\mu})/T} .\end{aligned}\tag{G.52}$$

Assim, determinando os outros termos da Eq.(G.50) podemos concluir também que

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \phi_f^{med}}{\partial n_{p,k_f}} \right) \left(\frac{\partial n_{p,k_f}}{\partial E_{k_f}} \right) &= \\ \frac{N_c M |q_f| B}{4\pi^2} \sum_{k_f=0}^{\infty} \alpha_{k_f} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z \frac{1}{E_{k_f}} \left[-\frac{n_{p,k_f}^2}{T} e^{(E_{k_f} - \tilde{\mu})/T} \right] , \\ \left(\frac{\partial \phi_f^{med}}{\partial \bar{n}_{p,k_f}} \right) \left(\frac{\partial \bar{n}_{p,k_f}}{\partial E_{k_f}} \right) &= \\ \frac{N_c M |q_f| B}{4\pi^2} \sum_{k_f=0}^{\infty} \alpha_{k_f} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z \frac{1}{E_{k_f}} \left[-\frac{\bar{n}_{p,k_f}^2}{T} e^{(E_{k_f} + \tilde{\mu})/T} \right] .\end{aligned}\tag{G.53}$$

Também calculamos facilmente a derivada de ϕ_f^{med} em relação à E_{k_f} , de maneira que

$$\left(\frac{\partial \phi_f^{med}}{\partial E_{k_f}} \right) = -\frac{N_c M |q_f| B}{4\pi^2} \sum_{k_f=0}^{\infty} \alpha_{k_f} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z \frac{(n_{p,k_f} + \bar{n}_{p,k_f})}{E_{k_f}^2} .\tag{G.54}$$

Compilando os resultados mostrados nas equações Eq.(G.52) e Eq.(G.53) junto com a derivada $\partial E_{k_f}/\partial B$ determinada anteriormente, chegamos ao seguinte

$$\begin{aligned} \phi_f'^{med}|_{T>0} = \frac{\phi_f^{med}}{B} - \frac{N_c|q_f|^2 B}{4\pi^2} \sum_{k_f=0}^{\infty} \alpha_{k_f} k_f \\ \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z \left\{ \frac{n_{p,k_f}}{E_{k_f}^2} \left[\frac{1}{E_{k_f}} + \frac{n_{p,k_f}}{T} e^{(E_{k_f} - \tilde{\mu})/T} \right] \right. \\ \left. + \frac{\bar{n}_{p,k_f}}{E_{k_f}^2} \left[\frac{1}{E_{k_f}} + \frac{\bar{n}_{p,k_f}}{T} e^{(E_{k_f} + \tilde{\mu})/T} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (G.55)$$

G.8 Derivada da Contribuição do Meio no Condensado em Temperatura Nula

Para o caso onde a temperatura é nula, a derivada da contribuição do meio denso no condensado

$$\phi_f^{med}|_{T=0} = \frac{N_c M |q_f| B}{2\pi^2} \sum_{k_f=0}^{k_{f,max}} \alpha_{k_f} \ln \left(\frac{\tilde{\mu} + \sqrt{\tilde{\mu}^2 - s_f^2}}{s_f} \right), \quad (G.56)$$

nos fornece a seguinte equação

$$\phi_f'^{med} = \frac{d\phi_f^{med}}{dB} = \frac{\partial \phi_f^{med}}{\partial B} + \left(\frac{\partial \phi_f^{med}}{\partial s_f} \right) \left(\frac{\partial s_f}{\partial B} \right). \quad (G.57)$$

A primeira derivada da expressão anterior é calculada do mesmo modo que antes $\partial \phi_f^{med}/\partial B = \phi_f^{med}/B$. Considerando a expressão para $s_f = \sqrt{M^2 + 2k_f|q_f|B}$ imediatamente determinamos a derivada em relação à B como $\partial s_f/\partial B = k_f|q_f|/s_f$. Por outro lado, derivando esta contribuição do condensado em relação ao fator s_f devemos obter

$$\frac{\partial \phi_f^{med}}{\partial s_f} = \frac{N_c M |q_f| B}{2\pi^2} \sum_{k_f=0}^{k_{f,max}} \alpha_{k_f} \frac{\partial}{\partial s_f} \ln \left(\frac{\tilde{\mu} + \sqrt{\tilde{\mu}^2 - s_f^2}}{s_f} \right), \quad (G.58)$$

que resulta no que segue

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_f^{med}}{\partial s_f} &= \frac{N_c M |q_f| B}{2\pi^2} \sum_{k_f=0}^{k_{f,max}} \alpha_{k_f} \left(\frac{s_f}{\tilde{\mu} + \sqrt{\tilde{\mu}^2 - s_f^2}} \right) \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial s_f} \left(\frac{\tilde{\mu} + \sqrt{\tilde{\mu}^2 - s_f^2}}{s_f} \right), \end{aligned} \quad (G.59)$$

portanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_f^{med}}{\partial s_f} &= \frac{N_c M |q_f| B}{2\pi^2} \sum_{k_f=0}^{k_{f,max}} \alpha_{k_f} \left(\frac{-s_f}{\tilde{\mu} + \sqrt{\tilde{\mu}^2 - s_f^2}} \right) \\ &\quad \times \left[\frac{s_f^2 (\tilde{\mu}^2 - s_f^2)^{-1/2} + \tilde{\mu} + (\tilde{\mu}^2 - s_f^2)^{1/2}}{s_f^2} \right], \end{aligned} \quad (G.60)$$

rearranjando os termos encontramos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_f^{med}}{\partial s_f} &= -\frac{N_c M |q_f| B}{2\pi^2} \sum_{k_f=0}^{k_{f,max}} \alpha_{k_f} \frac{1}{s_f (\tilde{\mu} + \sqrt{\tilde{\mu}^2 - s_f^2})} \\ &\quad \times \left(\frac{s_f^2 + \tilde{\mu} \sqrt{\tilde{\mu}^2 - s_f^2} + \tilde{\mu}^2 - s_f^2}{\sqrt{\tilde{\mu}^2 - s_f^2}} \right), \end{aligned} \quad (G.61)$$

e assim verificamos que

$$\frac{\partial \phi_f^{med}}{\partial s_f} = -\frac{N_c M |q_f| B}{2\pi^2} \sum_{k_f=0}^{k_{f,max}} \frac{\alpha_{k_f} \tilde{\mu}}{s_f \sqrt{\tilde{\mu}^2 - s_f^2}}. \quad (G.62)$$

Aplicando este último resultado à expressão mostrada na Eq.(G.57) finalmente determinamos a derivada que buscamos

$$\phi_f'^{med}|_{T=0} = \frac{\phi_f^{med}}{B} - \frac{N_c|q_f|^2 B}{2\pi^2} \sum_{k_f=0}^{k_{f,max}} \frac{\alpha_{k_f} k_f \tilde{\mu} M}{s_f^2 \sqrt{\tilde{\mu}^2 - s_f^2}} \quad (\text{G.63})$$